

**DISKRETE SYMMETRIEN
RELATIVISTISCHER TEILCHENSYSTEME**

Ulrich Mutze

1971

DISKRETE SYMMETRIEN
RELATIVISTISCHER TEILCHENSYSTEME⁺⁾

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Physikalischen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Ulrich Mutze

München

1971

⁺⁾ Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft
unterstützt



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. J. Meister

2. Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süssmann

Tag der mündlichen Prüfung: 9.6.1971

DISSERTATIONS – und FOTODRUCK FRANK oHG
8000 München 2 · Gabelsbergerstr. 15 · Tel.: 2 80 90 90

Zusammenfassung

Wir untersuchen Darstellungen von Gruppen auf Hilberträumen mit Überauswahlregeln und geben ein vollständiges Verfahren an, mit dem man diese verallgemeinerten Darstellungen aus Strahldarstellungen konstruieren kann. Für die volle Poincarégruppe wird gezeigt, daß ihre verallgemeinerten Darstellungen im wesentlichen zu Strahldarstellungen äquivalent sind. Schließlich beweisen wir einen Satz, der es gestattet die Strahldarstellungen einer Gruppe zu bestimmen, wenn die unitären Strahldarstellungen ihrer Normalteiler vom Index 2 bekannt sind.

Mit Hilfe dieses Satzes werden alle irreduziblen Strahldarstellungen der vollen Poincarégruppe zu reeller Masse, positiver Energie und beliebigem Spin berechnet. Aus dem Ergebnis wird abgeleitet, daß sich jede unitäre stetige Strahldarstellung der Poincarégruppe mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum zu einer Strahldarstellung der Poincarégruppe mit Zeitinversion erweitern läßt.

Ausgehend von den irreduziblen Strahldarstellungen der Poincarégruppe mit Raum-Zeit-Inversion werden mit der Fockraum-Methode von COOK freie Wightmanfelder für beliebige reelle Masse und beliebigen diskreten Spin konstruiert und zwar derart, daß der Darstellungsoperator der Raum-Zeit-Inversion auf die Felder wie der übliche PCT-Operator wirkt. Dabei sind die Felder auf einem Fockraum definiert, dessen Einteilchenraum nur Zustände positiver Energie enthält, weshalb eine löchertheoretische Uminterpretation entfällt. Durch Verdoppelung der Komponentenzahl gewinnen wir verallgemeinerte Diracfelder für beliebigen Spin. Weiter werden die Transformationseigenschaften der Felder unter der vollen Poincarégruppe berechnet. Im Ergebnis sind die üblichen Konventionen für das Klein-Gordon-, das Dirac- und das Weylfeld als Spezialfälle erhalten, jedoch mit der Abweichung, daß unser Darstellungsoperator des Elements Raumpiegelung der vollen Poincarégruppe wie der übliche PC-Operator wirkt.

Schließlich wird gezeigt, daß sich die Transformationseigenschaften der universellen 4 -Fermionenwechselwirkung als Invarianz unter der vollen Poincarégruppe deuten lassen.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Symmetrien in der Quantentheorie	6
2.1.	Quantentheoretische Grundbegriffe	6
2.2.	Symmetrioperationen	8
2.3.	Symmetriegruppen relativistischer Teilchensysteme	10
3.	Darstellungen von Gruppen durch Symmetrioperationen	13
3.1.	Bündeldarstellungen	13
3.2.	Strahldarstellungen und Multiplikator- darstellungen	18
3.3.	Erzeugung von Bündeldarstellungen durch Strahldarstellungen	25
3.4.	Konstruktion der irreduziblen Strahldarstellungen einer Gruppe aus denen ihrer Normalteiler vom Index 2	29
3.5.	Konstruktion unitärer irreduzibler Multiplikator- darstellungen einer Gruppe aus denen ihrer Normalteiler von höchstens abzählbar unendlichem Index	36
4.	Die stetigen irreduziblen Strahldarstellungen der vollen Poincarégruppe	38
4.1.	Die Struktur der vollen Poincarégruppe	38
4.2.	Die stetigen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}_0$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum	41
4.3.	Die stetigen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum	45
5.	Die volle Poincarégruppe in der Feldtheorie	52
5.1.	Spinorform für die physikalischen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}$	52
5.2.	Allgemeiner Fockraum-Formalismus	61
5.3.	Konstruktion freier Felder mit Hilfe der physikalischen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}$	64
5.4.	Feldgleichungen	70
5.5.	Transformationsverhalten der freien Felder unter Inversionen und unter Ladungskonjugation	72
5.6.	Spezielle Felder für Spin 0 und Spin 1/2	80
6.	Die volle Poincarégruppe als physikalische Symmetriegruppe	86
6.1.	Beschreibung freier Teilchensysteme	86
6.2.	Inversionen in einer formalen Wechselwirkungstheorie	89
6.3.	Bündeldarstellungen der vollen Poincarégruppe im Zustandsraum relativistischer Teilchensysteme	93
6.4.	Die volle Poincarégruppe als Symmetriegruppe der schwachen Wechselwirkung	104
	Anhang: Kurze Formelsammlung	110
	Liste der Symbole	111
	Literaturverzeichnis	113

1. Einleitung

Unter diskreten Symmetrien versteht man in erster Linie Rauminversion, Zeitinversion und Ladungskonjugation, bezeichnet mit P , T und C , und allgemeiner auch gewisse Elemente nichtzusammenhängender Symmetriegruppen wie Spiegelungen im Isospin-Raum oder Decktransformationen von Kristallen. Wir beschäftigen uns konkret nur mit den Operationen der ersten Art und beschränken uns dabei auf relativistische Systeme. Die Theorie im ersten Teil dieser Arbeit ist aber auch auf Operationen der zweiten Art anwendbar.

Die Literatur über diskrete Symmetrien ist so umfangreich, daß es einer Begründung bedarf ihr eine weitere Arbeit hinzuzufügen. Die Entdeckung des Zerfalls des langlebigen neutralen Kaons in zwei geladene Pionen im Jahre 1964 (s.[20]) hat gezeigt, daß von allen bis dahin angenommenen diskreten Symmetrieprinzipien allein der PCT -Invarianz universelle Gültigkeit zukommen kann. Dadurch ist jedoch das Interesse an solchen Prinzipien nicht gemindert worden, denn einerseits können sie für idealisierte Teilbereiche der Elementarteilchenphysik, charakterisiert durch die Vernachlässigung bestimmter Wechselwirkungstypen, aufrecht erhalten werden, und andererseits ist ihr Verständnis gerade für die Diskussion symmetriebrechender Effekte wesentlich. Unter dem letztgenannten Gesichtspunkt ist es aber wenig befriedigend, sich allein auf die Konventionen zu stützen, die für die Definitionen von Rauminversion, Zeitinversion und Ladungskonjugation im Fall des Diracfeldes, des Klein-Gordon-Feldes und des Maxwellfeldes üblich geworden sind. Vielmehr sollte man alle mathematisch bestehenden Möglichkeiten für solche Operationen aufsuchen. Dies wurde von einem rein gruppentheoretischen Standpunkt aus, der sich allein um das mögliche Transformationsverhalten der Einteilchenzustände kümmert, in mehreren Arbeiten durchgeführt, wenngleich man die Ergebnisse nur für Teilchen mit nichtverschwindender Ruhemasse explizit angegeben findet (s.[18],[29]⁺, [37]). Um diese Ergebnisse für die Diskussion konkreter Elementarteilchenprozesse benutzen zu können, muß man sie in den Formalismus der Feldtheorie einbauen. Das wurde bisher noch nicht durchgeführt und ist das in erster Linie angestrebte Resultat dieser Arbeit. Deren Fragestellungen und Ergebnisse sollen im folgenden skizziert werden.

Es gibt im wesentlichen zwei inäquivalente Wege, diskrete Symme-

+)In [29] ist auch der Fall $m=0$ behandelt, jedoch m.E. völlig undurchsichtig.

trieoperationen für relativistische Teilchensysteme einzuführen.

1. Die Definition der diskreten Symmetrieoperationen durch ihre Wirkung auf die Feldoperatoren. Dabei werden Raum inversion und Ladungskonjugation bzw. Zeitinversion als unitäre Operatoren U_P und U_C bzw. als antiunitärer Operator U_T auf dem Zustandsraum definiert derart, daß für die Feldoperatoren $\Psi_\alpha(x)$ gilt:

$$U_P \Psi_\alpha(x) U_P^{-1} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x^0, -\vec{x}), \quad U_C \Psi_\alpha(x) U_C^{-1} = \sum_\beta C_{\alpha\beta} \Psi_\beta^\dagger(x),$$

$$U_T \Psi_\alpha(x) U_T^{-1} = \sum_\beta B_{\alpha\beta} \Psi_\beta(-x^0, \vec{x}) \text{ mit komplexen Matrizen } A, B, C. \text{ Das ist}$$

die übliche Methode bei der Anwendung auf Elementarteilchenprozesse und bei der Behandlung des Gegenstandes in den Lehrbüchern (z.B. [20.a], [28]); eine sehr gründliche Diskussion der diskreten Symmetrien auf dieser Basis findet man in [12].

2. Die gruppentheoretische Definition. Hier steht nicht das Feldkonzept am Anfang, sondern eine strukturierte Menge von Observablen (z.B. eine Algebra oder ein Verband) und die damit assoziierte Gruppe von Symmetrieoperationen, d.h. der strukturhaltenden Bijektionen der Observablenmenge. Als Ausdruck der relativistischen Invarianz ist dann jedem Element der eigentlichen orthochronen Poincarégruppe $\mathcal{P}_0$ eine Symmetrieoperation zugeordnet; diese Zuordnung erhält das Multiplikationsgesetz und ist somit ein Gruppenhomomorphismus. Läßt sich dieser Homomorphismus auf die volle Poincarégruppe $\mathcal{P}$ fortsetzen, so definiert man die Bilder von $I_g: (x^0, \vec{x}) \mapsto (x^0, -\vec{x})$ und $I_t: (x^0, \vec{x}) \mapsto (-x^0, \vec{x})$ als Operationen der Raum inversion und der Zeitinversion. Auf die Ladungskonjugation, für die eine analoge Definition weniger evident ist, kommen wir später zu sprechen. Wir gehen von der zweiten Definition aus und zeigen nach Konstruktion geeigneter Felder, daß sie die konventionelle Definition als Spezialfall enthält.

Zur Spezialisierung der Gruppe der Symmetrieoperationen sind physikalische Annahmen über die Menge der Observablen nötig, von denen die wichtigste die Berücksichtigung von Überauswahlregeln (superselection rules) ist. Das Konzept der Überauswahlregeln ist in jüngster Zeit der Gegenstand engagierter Kritik geworden (s. [23]); ohne auf deren Stichhaltigkeit hier eingehen zu können sei bemerkt, daß sie nicht die Angemessenheit der mathematischen Beschreibung - Observablen entsprechen Operatoren, die alle kohärenten Teilräume invariant lassen - in Zweifel zieht, sondern die allgemein übliche physikalische Interpretation dieses Formalismus als Verletzung des

Superpositionsprinzips. Unsere Wahl der Symmetrieoperationen ist die einfachste, die mit der Existenz von Überauswahlregeln verträglich ist: Eine Symmetrieoperation ist durch eine Äquivalenztransformation der Observablen mit einem additiven, isometrischen und invertierbaren Operator gegeben, der jeden kohärenten Teilraum unitär oder antiunitär auf einen kohärenten Teilraum abbildet. Offenbar bewirken zwei solche Operatoren, die sich auf jedem kohärenten Teilraum nur um einen Phasenfaktor unterscheiden, dieselbe Symmetrieoperation. Damit ist die effektive Gruppe der Symmetrieoperationen der Quotient einer Operatorgruppe nach einer Gruppe von "Phasenoperatoren". Ein Homomorphismus einer Gruppe G in diese Quotientengruppe ist eine Verallgemeinerung einer Strahldarstellung; er reduziert sich auf eine Strahldarstellung, wenn es keine Überauswahlregeln, also nur einen kohärenten Raum gibt. Gruppendarstellungen dieser verallgemeinerten Art scheinen zuerst ohne besonderen Namen in [1] eingeführt worden zu sein; sie werden von uns Bündeldarstellungen genannt. Damit läßt sich unsere Definition der Inversionsoperationen auch so formulieren: Die Operationen Rauminversion und Zeitinversion sind die Bilder von I_s und I_t unter einer Bündeldarstellung der vollen Poincarégruppe.

Die Verallgemeinerung von Strahldarstellungen auf Bündeldarstellungen erweist sich, stellt man vernünftige Stetigkeitsforderungen, für zusammenhängende topologische Gruppen als trivial: Jeder kohärente Teilraum wird in sich abgebildet, so daß man auf jedem solchen Teilraum eine Strahldarstellung hat. Das ist dagegen für Gruppen mit mehreren Zusammenhangskomponenten nicht notwendig der Fall. Für die volle Poincarégruppe jedoch liegt, wie wir zeigen werden, aufgrund ihrer besonderen algebraischen Struktur im wesentlichen dieselbe Situation vor wie für eine zusammenhängende Gruppe. Die dazu nötigen Überlegungen führen wir so allgemein, daß sie einen vollständigen Konstruktionssatz der Bündeldarstellungen beliebiger Gruppen aus deren Strahldarstellungen liefern.

Eine besondere Bedeutung kommt den stetigen irreduziblen Strahldarstellungen der vollen Poincarégruppe zu. Einmal kann man aus ihnen durch Bildung direkter Integrale alle stetigen Strahldarstellungen und alle Bündeldarstellungen konstruieren. Zum anderen liefern sie alle Möglichkeiten für die Operationen Rauminversion und Zeitinversion auf den Einteilchenzuständen freier relativistischer Teilchensysteme. Diese Darstellungen sind im Prinzip bekannt (s. [18] [29], [37]), aber ihre Ableitung ist vom Standpunkt mathematischer

Strenge nicht völlig befriedigend. Um eine exakte Basis zu schaffen, beweisen wir einen Satz, der folgendes allgemeine Problem löst: Zu konstruieren sind die unitär-antiunitären Strahldarstellungen einer Gruppe, wenn die unitären Strahldarstellungen ihrer Normalteiler vom Index 2 bekannt sind. Spezialfälle dieses Satzes gehen auf CLIFFORD [5] und WIGNER [36] zurück.

Bei der Konstruktion der stetigen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}$ beschränken wir uns auf solche Strahldarstellungen, deren Energie-Impuls-Spektrum im Vorwärtslichtkegel liegt (daher muß die Rauminversion unitär und die Zeitinversion antiunitär dargestellt werden), lassen aber auch "kontinuierlichen" Spin zu. Schränkt man die genannten Darstellungen von $\mathcal{P}$ auf $\mathcal{P}_0$ ein, so sind sie für positive Masse entweder irreduzibel oder zerfallen in zwei äquivalente irreduzible Unterdarstellungen; und für Masse Null zerfallen sie in zwei oder vier irreduzible Unterdarstellungen, die sich nur im Vorzeichen der Helizität unterscheiden können. Im Falle der "verdoppelten" Darstellungen ist es naheliegend, die beiden unter $\mathcal{P}_0$ invarianten Teilräume als Zustandsräume für Teilchen und Antiteilchen anzusehen, damit ist dann in natürlicher Weise ein Teilchen-Antiteilchen-Konjugationsoperator (kurz Ladungskonjugation) definiert. Diese Interpretation der "verdoppelten" Strahldarstellungen von $\mathcal{P}$ wurde bereits in [9] und [29] vorgeschlagen. Ihre Konsistenz mit der üblichen Charakterisierung von Teilchen und Antiteilchen läßt sich nicht im Rahmen einer Einteilchentheorie zeigen; denn nach dem üblichen Zugang bekommt das Antiteilchenkonzept seine endgültige Form erst in einer Vielteilchentheorie, während es in einer Einteilchentheorie lediglich durch die unphysikalischen Lösungen negativer Energie angedeutet ist.

Wir entwickeln eine Methode zur Konstruktion des Vielteilchenraums und freier quantisierter Felder darauf, bei der keine löchertheoretische Uminterpretation des Einteilchenraums nötig ist und nach der sich das Transformationsverhalten von Operatoren im Vielteilchenraum, z.B. der Feldoperatoren, nach festen Regeln aus dem Transformationsverhalten der Einteilchenzustände ergibt. Nach Wahl geeigneter stetiger Strahldarstellungen im Einteilchenraum konstruieren wir mit dieser Methode freie Wightmanfelder, deren Eigenschaften, insbesondere ihr Transformationsverhalten unter diskreten Symmetrieen, mit denen der üblichen Felder für Spin 0 und Spin $1/2$ übereinstimmen bis auf den Unterschied, daß unser Rauminversionsope-

rator mit dem üblichen PC-Operator identisch ist⁺). Simultane PC- und T-Invarianz in der üblichen Nomenklatur kann man danach als Invarianz unter der vollen Poincarégruppe auffassen, so daß allein die beobachteten PC-verletzenden Effekte eine (sehr schwache) Brechung der vollen Poincaréinvarianz bedeuten. Die sog. Paritätsverletzung bei schwacher Wechselwirkung ist in dieser Interpretation eine Brechung der Invarianz unter Ladungskonjugation. Um dies völlig zu präzisieren, beweisen wir am Ende explizit die Invarianz der universellen 4-Fermionen-Wechselwirkung unter der vollen Poincarégruppe.

Ich danke Herrn Prof. H.J.Meister für die Anregung zu dieser Arbeit, für viele gründliche Diskussionen und für wertvolle Hinweise und Vorschläge.

Herrn H.Brennich danke ich für die Richtigstellung eines Irrtums in der ersten Phase dieser Arbeit.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für finanzielle Unterstützung.

⁺) Analoges gilt auch für das Spin-1-Feld. Es sind jedoch einige Umformungen erforderlich, um unser Spin-1-Feld mit dem üblichen Maxwellfeld vergleichen zu können, worauf wir in dieser Arbeit aber nicht eingehen.

2. Symmetrien in der Quantentheorie

Es werden die Begriffe eingeführt, die zur Diskussion der Wirkung von Gruppen im Rahmen der Quantentheorie nötig sind.

2.1. Quantentheoretische Grundbegriffe

In der Quantentheorie - und nicht nur dort - ist die Einführung folgender zwei Grundkonzepte erhellend:

Die Observablen (operational, d.h. durch Meßvorschriften, erklärte Eigenschaften) charakterisieren die Qualitäten und Quantitäten, die man an physikalischen Systemen beobachten kann.

Die Zustände charakterisieren die "Summe der Erwartungen" bzgl. des Ausgangs von Messungen.

Durch empirisch mehr oder weniger begründete Annahmen über Observable und Zustände gelangt man zur üblichen Beschreibung derselben durch Operatoren auf einem Hilbertraum (s.z.B. [17]). Bei dieser Beschreibung kann man zur Untersuchung von Symmetrien die gut entwickelte Theorie der Darstellung von Gruppen in einem Hilbertraum direkt anwenden. In den Rahmen einer Hilbertraumformulierung der Quantentheorie passen sowohl die reine S-Matrix-Theorie, als auch die axiomatischen Theorien von WIGHTMAN und von HAAG, wenn auch in letzterer der Hilbertraum kein primäres Konzept ist.

In v.NEUMANNs klassischer Axiomatik der Quantentheorie werden alle selbstadjungierten Operatoren als observabel angesehen. Heute ist aber offenbar, daß dann die Beschreibung von Fermionen und Bosonen, oder von Teilchen verschiedener Ladung in einem gemeinsamen Hilbertraum zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt. Die Einschränkungen an die Observablen und Zustände, die solche Konsequenzen vermeiden, werden Überauswahlregeln (superselection rules) genannt; sie können auf folgende Weise präzisiert werden: Der Hilbertraum H des betrachteten Quantensystems ist eine höchstens abzählbare orthogonale Summe von gleichdimensionalen Unterräumen H_i und alle H_i sind unter all denjenigen Operatoren auf H , denen Observable entsprechen, invariant und enthalten ihrerseits keine unter all diesen Operatoren invarianten Unterräume mehr. Die H_i heißen dann kohärente Unterräume und man sagt, sie seien durch Überauswahlregeln getrennt. Einen "Hilbertraum mit Überauswahlregeln" fassen wir als neues Objekt auf, das wir Bündelraum nennen.

(2.1) Def: Seien H ein Hilbertraum⁺, I eine höchstens abzählbare Menge und $P_I := (P_i)_{i \in I}$ eine Familie von Projektoren mit folgenden Eigenschaften:

$$\sum_{i \in I} P_i = 1_H, \forall i, j \in I \quad (\dim(P_i H) = \dim(P_j H); i \neq j \Rightarrow P_i P_j = P_j P_i = 0).$$

Dann nennen wir das Paar (H, P_I) einen Bündelraum (über H).

Mit einem Bündelraum sind in natürlicher Weise gewisse Vektormengen, Operatormengen und Operatoralgebren verbunden.

(2.2) Def: Sei (H, P_I) ein Bündelraum. Dann seien

$$\mathcal{J}(H, P_I) := \{x \in H \mid \|x\| = 1, \exists i \in I (P_i x = x)\},$$

$\mathcal{N}(H, P_I)$ die v. Neumann-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf H , die mit allen Projektoren $P_i, i \in I$, vertauschen,

$\mathcal{A}(H, P_I)$ das Zentrum von $\mathcal{N}(H, P_I)$, d.h.

$$\mathcal{A}(H, P_I) = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i P_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, \sup_{i \in I} |\alpha_i| < \infty \right\},$$

$\mathcal{O}(H, P_I)$ die Menge der selbstadjungierten Operatoren auf H , deren Spektralprojektoren zu $\mathcal{N}(H, P_I)$ gehören, und

$\mathcal{O}_1(H, P_I)$ die Menge der eindimensionalen Projektoren aus $\mathcal{O}(H, P_I)$.

Die Elemente von $\mathcal{O}(H, P_I)$ bzw. $\mathcal{A}(H, P_I)$ bzw. $\mathcal{O}(H, P_I) \cap \mathcal{A}(H, P_I)$ nennen wir Präobservable bzw. Überauswahloperatoren bzw. Überauswahlobservable.

Das unübliche Wort Präobservable soll ausdrücken, daß den so benannten Operatoren nicht notwendig physikalische Observable im Sinne von operational erklärten Eigenschaften entsprechen müssen; das wäre in einer relativistischen Quantendynamik eine völlig unrealistische Forderung. Die Präobservablen bilden lediglich den weitesten Rahmen für die Operatoren mit physikalischer Bedeutung. Die Überauswahloperatoren vertauschen nach ihrer Definition mit allen Präobservablen. Reine Zustände werden beschrieben durch (Dichte-)Operatoren aus $\mathcal{O}_1(H, P_I)$ oder auch durch Vektoren aus $\mathcal{J}(H, P_I)$ und statistische Gesamtheiten allgemein durch positive, vollstetige Operatoren aus $\mathcal{O}(H, P_I)$ mit endlicher Spur. Ein Operator R der letzt genannten Art definiert durch $f_R: \mathcal{N}(H, P_I) \rightarrow \mathbb{C}, f_R(A) := \text{Spur}(RA) / \text{Spur}(R)$, ein positives beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{N}(H, P_I)$, und jedes solche Funktional wird durch einen Dichteoperator von obiger Art erzeugt.

⁺) Unter Hilbertraum verstehen wir stets einen komplexen Hilbertraum.

2.2. Symmetrioperationen

Die Diskussion von Symmetrioperationen ist besonders übersichtlich im Heisenbergbild, in dem sich die Zustände nur durch Messungen, die Observablen nur durch die Dynamik des Systems verändern. Die operationale Bedeutung einer Observablen ist dann die einer Meßvorschrift, die auch die raum-zeitliche Erstreckung des Meßvorganges festlegt. Zur Motivierung der folgenden Erklärung einer Symmetrioperation betrachten wir zunächst die Symmetrie des Naturgeschehens in Bezug auf eine Zeittranslation. Diese Symmetrie besagt natürlich nicht die zeitliche Konstanz aller Meßergebnisse, sondern folgendes: Werden an einer statistischen Gesamtheit irgendwelche Messungen ausgeführt, dann gibt es eine andere Gesamtheit, für die man im Rahmen der Statistik dieselbe Wertverteilung erhält, wenn man nur alle Messungen durch einheitlich zeitlich verschobene ersetzt. Wurde die erste Gesamtheit nicht aus der Natur, z.B. der kosmischen Strahlung, bezogen, sondern experimentell, z.B. mit einem Beschleuniger, erzeugt, so erhält man die andere Gesamtheit, indem man den Betrieb der Experimentalanordnung zeitlich verschiebt. Analoges gilt für räumliche Translationen und Lorentztransformationen. Es gibt also für jede Poincarétransformation eine Permutation sowohl der Observablen (Meßvorschriften) als auch der Zustände (statistische Gesamtheiten), die keine Änderung in der Statistik der Meßwerte hervorruft. Unter einer Symmetrioperation versteht man gerade ein solches Paar von Permutationen. Fassen wir gemäß (2.2)ff sowohl Observable als auch Zustände als Präobservable eines Bündelraumes auf, so bedeutet die Invarianz der Meßerwartungen im wesentlichen die Invarianz der Spuren von Produkten aus zwei Projektoren. Nun ist jede Bijektion von $\mathcal{O}(H, P_I)$, die für alle Paare von Elementen die Spur ihres Produktes invariant läßt, nach einem Satz von WIGNER von der in der folgenden Definition angegebenen Form. Das reicht allerdings zur Begründung dieser Definition noch nicht aus; für eine eingehende Diskussion verweisen wir auf [15].

(2.3) Def: Seien (H, P_I) und (H', P'_I) Bündelräume. Dann heißt eine bijektive Abbildung $\gamma: \mathcal{O}(H, P_I) \rightarrow \mathcal{O}(H', P'_I)$ eine Symmetrioperation, kurz: Symmetrie, wenn es eine Abbildung U von H in H' gibt mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $U: H \rightarrow H'$ ist bijektiv,
- (b) $\forall x \in H \quad (\|Ux\| = \|x\|)$,
- (c) $\forall x, y \in H; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (U(\alpha x + \beta y) = \alpha Ux + \beta Uy)$,

(d) $\forall i \in I ((\forall x \in H_i, \alpha \in \mathbb{C} (U(\alpha x) = \alpha Ux)) \text{ oder } (\forall x \in H_i, \alpha \in \mathbb{C} (U(\alpha x) = \alpha^* Ux)))$,

(e) $\forall i \in I (\exists i' \in I' (UP_i U^{-1} = P_{i'}))$,

(f) $\forall A \in \mathcal{O}(H, P_I) (\mathcal{J}(A) = UAU^{-1})$.

Die Menge der Operatoren von H in H' , die (a) - (e) erfüllen, bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(H, P_I; H'; P'_I)$ und die Teilmenge der unitären Operatoren mit $\mathcal{U}_+(H, P_I; H'; P'_I)$. Ist speziell $(H, P_I) = (H', P'_I)$, so bilden sowohl die Symmetrien, als auch die ihnen zugeordneten Operatoren eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{J}(H, P_I)$ bzw. mit $\mathcal{U}(H, P_I)$ bezeichnen. Weiter bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_+(H, P_I)$ den Normalteiler von $\mathcal{U}(H, P_I)$ der unitären Operatoren und mit $\mathcal{U}_-(H, P_I)$ die Teilmenge von $\mathcal{U}(H, P_I)$ der antiunitären Operatoren.

(2.4) Bem: Für jedes $U \in \mathcal{U}(H, P_I)$ und jedes $i \in I$ ist $U|_{H_i}$ mit $H_i := P_i H$ eine unitäre oder antiunitäre Abbildung von H_i in H_i . Die von U induzierte Abbildung $\underline{U}: I \rightarrow I, \underline{U}(i) := i'$ ist wegen der Bijektivität von U ebenfalls bijektiv. Damit lautet (e): $\forall i \in I (UP_i U^{-1} = P_{\underline{U}(i)})$, und man sieht leicht, daß die Abbildung $U \mapsto \underline{U}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{U}(H, P_I)$ in die Gruppe der Bijektionen von I ist.

(2.5) Bem: $\mathcal{J}(H, P_I)$ ist isomorph zur Gruppe der *-Automorphismen von $\mathcal{N}(H, P_I)$ als Algebra über den reellen Zahlen. Denn man kann zeigen: Für jede Bijektion $\mathcal{J}$ von $\mathcal{N}(H, P_I)$ mit $\forall A, B \in \mathcal{N}(H, P_I), \alpha, \beta \in \mathbb{R} (\mathcal{J}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathcal{J}(A) + \beta \mathcal{J}(B))$
 $\forall A \in \mathcal{N}(H, P_I) (\mathcal{J}(A^+) = (\mathcal{J}(A))^+, \mathcal{J}(AB) = \mathcal{J}(A)\mathcal{J}(B))$
gibt es ein $U \in \mathcal{U}(H, P_I)$ derart, daß für alle $A \in \mathcal{N}(H, P_I)$ gilt:
 $\mathcal{J}(A) = UAU^{-1}$.

Die Zuordnung zwischen Symmetrien und Operatoren nach (2.3.f) ist offensichtlich nicht eindeutig. Zwei Operatoren $U, V \in \mathcal{U}(H, P_I, H', P'_I)$ erzeugen genau dann dieselbe Symmetrie, wenn $V^{-1}U$ mit allen $A \in \mathcal{O}(H, P_I)$ vertauscht und damit, wie man leicht zeigt, zu $\mathcal{A}(H, P_I)$ gehört. Daraus folgt, daß $\mathcal{J}(H, P_I)$ isomorph ist zu der im folgenden erklärten Gruppe $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$.

(2.6) Def: Sei (H, P_I) ein Bündelraum. Dann ist

$\mathcal{C}(H, P_I) := \mathcal{U}(H, P_I) \cap \mathcal{A}(H, P_I) = \left\{ \sum_{i \in I} \omega_i P_i \mid \omega_i \in \mathbb{C}_1 \right\}$ ein abelscher Normalteiler von $\mathcal{U}(H, P_I)$ und wir definieren $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ als die Quotientengruppe $\mathcal{U}(H, P_I) / \mathcal{C}(H, P_I)$; ihre Elemente schreiben wir als Äquivalenzklassen $[U] := \{v \in \mathcal{U}(H, P_I) \mid v^{-1}U \in \mathcal{C}(H, P_I)\}$ und setzen $\tilde{\mathcal{U}}_+(H, P_I) := \{[U] \in \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I) \mid U \in \mathcal{U}_+(H, P_I)\}$. Durch $[U] \mapsto \underline{[U]} := \underline{U}$ (s. (2.4)) ist ein

Homomorphismus von $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ in die Gruppe der Bijektionen von I gegeben.

Für mathematische Überlegungen ist es zweckmäßig, eine Symmetrioperation als ein Element der Gruppe $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ anzusehen, die wir Bündelgruppe von H nennen, da man sie in einem mehr geometrisch orientierten Zugang als Automorphismengruppe eines Faserbündels erklären kann (s. [24]).

Gibt es im Hilbertraum H keine Überauswahlregeln, ist also (H, P_I) der triviale Bündelraum mit $I = \{1\}$, $P_1 = 1_H$, so setzen wir $\mathcal{U}(H, P_I) = \mathcal{U}(H)$, $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I) = \tilde{\mathcal{U}}(H)$ etc. und haben:

(2.7) $\mathcal{U}(H)$ ist die Gruppe der semiunitären (d.h. unitären oder antiunitären) Operatoren und $\mathcal{U}_+(H)$ die Gruppe der unitären Operatoren auf H . Offenbar ist $\mathcal{U}_+(H)$ ein Normalteiler von $\mathcal{U}(H)$ und die Quotientengruppe $\mathcal{U}(H)/\mathcal{U}_+(H)$ ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$. Weiter gilt:

$\mathcal{E}(H) = \{\omega 1_H \mid \omega \in \mathbb{C}\}$, $\tilde{\mathcal{U}}(H) = \mathcal{U}(H)/\mathcal{E}(H)$, $\tilde{\mathcal{U}}_+(H) = \mathcal{U}_+(H)/\mathcal{E}(H)$ und $\mathcal{U}_-(H) = \tilde{\mathcal{U}}(H) \setminus \tilde{\mathcal{U}}_+(H)$. Einselement von $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ bezeichnen wir mit $\tilde{1}_H$ oder kurz $\tilde{1}$. $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ bzw. $\tilde{\mathcal{U}}_+(H)$ nennen wir Strahlgruppe⁺ bzw. unitäre Strahlgruppe von H .

2.3. Symmetriegruppen relativistischer Teilchensysteme

Bisher haben wir zur Beschreibung von Quantensystemen im wesentlichen drei Objekte eingeführt: Einen Bündelraum, die damit assoziierte Menge von Präobservablen und die zugehörige Gruppe von Symmetrioperationen. Von der Anzahl der kohärenten Unterräume abgesehen sind damit keine systemspezifischen, insbesondere keine dynamischen Eigenschaften festgelegt. Die Beschreibung relativistischer Teilchensysteme erfordert natürlich weitere Konzepte, über die beim heutigen Stand der Teilchenphysik keine allgemein akzeptierten Vorstellungen bestehen, von denen aber die Formulierung physikalischer Symmetrieprinzipien und erst recht deren Konsequenzen notwendigerweise abhängen. Obwohl wir bei physikalischen Anwendungen weitgehend im Rahmen der üblichen formalen Wechselwirkungsbeschreibung durch Hamiltonoperatoren argumentieren werden, wollen wir hier einen allgemeinen Rahmen aufstellen, in den sich eine konsistente Wechselwirkungstheorie einfügen sollte und der sich gerade auf diejenigen Strukturen bezieht, welche für Symmetrie-

⁺) Die Elemente von $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ sind Operatorstrahlen in der Nomenklatur von BARGMANN [1].

betrachtungen wesentlich sind. Unsere Forderungen sind folgende:

(2.8) (a) Die wechselwirkenden Zustände werden durch die Elemente von $\mathcal{O}_1(H_W, P_I^W)$ eines Bündelraumes (H_W, P_I^W) beschrieben. Jede (aktive) inhomogene Lorentztransformation, d.h. jedes Element g der zusammenhängenden Poincarégruppe $\mathcal{P}_0$, bewirkt eine Symmetrieeoperation $\gamma_W(g) \in \mathcal{V}(H_W, P_I^W)$, $\forall A \in \mathcal{O}(H_W, P_I^W)$ ($\gamma_W(g)A = U_W(g)AU_W(g)^{-1}$, $U_W(g) \in \mathcal{U}_+(H_W, P_I^W)$) derart, daß $\gamma_W: \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{V}(H_W, P_I^W)$, $g \mapsto \gamma_W(g)$, ein stetiger⁺ Homomorphismus ist. Weiter ist $U_W: \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{U}_+(H_W, P_I^W)$, $g \mapsto U_W(g)$, auf die Translationsgruppe $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{P}_0$ eingeschränkt ein stetiger⁺ Homomorphismus und das Spektralmaß auf $\mathbb{R}^4$, das diesem nach dem Stoneschen Theorem zugeordnet ist, verschwindet außerhalb des abgeschlossenen Vorwärtslichtkegels.

(b) Für die asymptotisch freien Zustände gelten zu (a) analoge Bedingungen mit (H, P_I) , γ und U anstelle der entsprechenden mit W indizierten Größen. Überdies wird gefordert, daß U von der speziellen in (6.1), (6.2) angegebenen Form ist.

(c) Der Zusammenhang zwischen den wechselwirkenden Zuständen und den asymptotischen Zuständen wird durch zwei Abbildungen α_+ und α_- von $\mathcal{O}_1(H_W, P_I^W)$ in $\mathcal{O}_1(H, P_I)$ gegeben, die jeweils dem Limes für $t \rightarrow +\infty$ und $t \rightarrow -\infty$ entsprechen. Für alle $\xi \in \{+, -\}$, $i \in I$, $P \in \mathcal{O}_1(H_W, P_I^W)$, $g \in \mathcal{P}_0$ gelte:

$$(1) U(g)\alpha_\xi(P)U(g)^{-1} = \alpha_\xi(U_W(g)PU_W(g)^{-1})$$

$$(2) PH_W \subset P_I^W H_W \implies \alpha_\xi(P)H \subset P_I H.$$

(d) Die S-Matrix ist ein unitärer Operator auf H mit:

$$(3) \forall P \in \mathcal{O}_1(H_W, P_I^W) (S\alpha_-(P)S^{-1} = \alpha_+(P)),$$

$$(4) \forall g \in \mathcal{P}_0, P \in \mathcal{O}_1(H, P_I) (SU(g)PU(g)^{-1}S^{-1} = U(g)SPS^{-1}U(g)^{-1}),$$

$$(5) \forall i \in I (SP_i S^{-1} = P_i).$$

Diese Forderungen sollen kurz erläutert werden; eine Konkretisierung in einem Rahmen der üblichen formalen Wechselwirkungstheorie folgt in 6.2. Die Annahme in (a) ist das nullte Wightman-Axiom, hier formuliert für die Poincarégruppe selbst, anstelle ihrer universellen Überlagerungsgruppe $\hat{\mathcal{P}}_0$. Die Bündelbasis I (die in (a) und (b) dieselbe ist) hat für Systeme, deren Gesamtdrehimpuls sowohl ganzzahlige, als auch halbzahlige Werte annehmen kann - wie in 6.3.

+) Die Topologie von $\mathcal{V}(H_W, P_I^W)$ ist in (3.3) und die von $\mathcal{U}_+(H_W, P_I^W)$ wie in (3.12) erklärt.

gezeigt wird - mindestens 2 Elemente, so daß der Bündelraum nicht trivial ist. Gibt es neben der Überauswahlregel zwischen Zuständen mit halb- und ganzzahligem Drehimpuls keine weiteren Überauswahlregeln, kann man allerdings den Bündelcharakter des Zustandsraumes weitgehend ignorieren, indem man einen mit $\mathcal{Y}_W$ eng verwandten Homomorphismus von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ in $\mathcal{Y}(H_W, P_I^W)$ betrachtet, der dann stets von einer unitären Darstellung im klassischen Sinn erzeugt wird. Die zusätzliche Forderung (6.1) und (6.2) für die asymptotischen Zustände sichert die Teilcheninterpretation und das übliche relativistische Transformationsverhalten dieser Zustände; überdies werden die kinematischen Observablen Energie, Impuls und Drehimpuls mit Hilfe von U als infinitesimale Generatoren definiert. Kurz - die physikalischen Eigenschaften der Streuzustände werden völlig durch U beschrieben. Das Konzept der asymptotisch freien Zustände und eines Grenzübergangs zwischen wechselwirkenden und asymptotisch freien Zuständen zeigt eine subtile Abhängigkeit von speziellen Zügen einer dynamischen Theorie. In der Streutheorie von HAAG-RUELLE z.B. sind die Hilberträume H_W und H identisch (ebenso U_W und U) und der Übergang zu asymptotischen Zuständen wird, wenn man die Zustände durch Vektoren anstelle von Projektoren beschreibt, durch einen Limes in der starken Topologie des Hilbertraumes vermittelt, während die "Asymptotenbedingung" des LSZ-Formalismus eine Art schwachen Limes beschreibt. In beiden Formalismen ist der Übergang zum asymptotischen Zustand unabhängig vom Bezugssystem, was durch (1) ausgedrückt wird. (2) ist eine selbstverständliche Verträglichkeitsbedingung für Überauswahlregeln und asymptotischen Limes. Die Bedeutung der unter (d) angegebenen Eigenschaften der S-Matrix ist evident. Die Forderungen (b) und (d. 4-5) liefern für sich den Rahmen einer relativistischen S-Matrixtheorie, wobei allerdings die fundamentale Forderung der Kausalität ausgeklammert ist, da sie wesentlich subtilerer Natur ist als Unitarität und Poincaréinvarianz.

Nun sind wir in der Lage das Konzept einer Symmetriegruppe von Teilchensystemen zu präzisieren:

(2.9) Ein relativistisches Teilchensystem sei charakterisiert durch die Objekte aus (2.8). Dann heißt eine Gruppe $G \supset \mathcal{P}_0$ eine Symmetriegruppe des Systems, wenn gilt:

Es gibt einen Homomorphismus $\tilde{\mathcal{Y}}_W: G \rightarrow \mathcal{Y}(H_W, P_I^W)$ mit $\tilde{\mathcal{Y}}_W|_{\mathcal{P}_0} = \mathcal{Y}_W$ und einen Homomorphismus $\tilde{\mathcal{Y}}: G \rightarrow \mathcal{Y}(H, P_I)$ mit $\tilde{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{P}_0} = \mathcal{Y}$ derart, daß gilt

$$(1) \forall g \in G, P \in \mathcal{O}_1(H_W, P_I^W), \varepsilon \in \{+, -\} \quad (\tilde{\gamma}(g) \alpha_\varepsilon(P) = \alpha_\varepsilon(\tilde{\gamma}_W(g) P))^+,$$

$$(2) \forall g \in G, P \in \mathcal{O}_1(H, P_I) \quad (S \tilde{\gamma}(g) P S^{-1} = \tilde{\gamma}(g) S P S^{-1})^+.$$

Als Ganzes stellt (2.9) ein sehr ambitioniertes Konzept einer Symmetriegruppe dar, da von exakter relativistischer Invarianz ausgegangen wird, die indessen noch in keinem Modell wechselwirkender Teilchen erfüllt werden konnte. Läßt man die Forderungen, die sich auf $\tilde{\gamma}_W$ beziehen, weg, so erhält man ein einfacheres Konzept, das sich im Rahmen der reinen S-Matrix-Theorie bewegt. Symmetriegruppen in diesem schwächeren Sinn sind z.B. die volle Poincarégruppe $\mathcal{P}$ für das idealisierte System nur schwach wechselwirkender Teilchen und $\mathcal{P} \otimes \text{SU}(2)$ für das idealisierte System nur stark wechselwirkender Teilchen. Für die Versöhnung der ersten Aussage mit der sog. Paritätsverletzung bei schwacher Wechselwirkung verweisen wir auf 6.4.

3. Darstellungen von Gruppen durch Symmetrieeoperationen

Es wird die Aufgabe analysiert, die Homomorphismen einer Gruppe in die Gruppe der Symmetrieeoperationen eines Quantensystems aufzufinden. Dabei wird ein systematischer Reduktionsprozess entwickelt, der es gestattet diese Homomorphismen aus unitären Strahldarstellungen zu konstruieren.

3.1. Bündeldarstellungen

Viele Gesetze der Teilchenphysik lassen sich als strenge oder als gebrochene Symmetrieprinzipien formulieren, d.h. man kann eine Gruppe von Symmetrieeoperationen angeben, welche die S-Matrix im Sinne von (2.9.2) streng, oder erst nach einem idealisierenden Grenzprozess, invariant lassen und deren Multiplikationsgesetz sich als das einer bekannten "abstrakten" Gruppe G beschreiben läßt. Es gibt damit einen Homomorphismus von G in die Gruppe der Symmetrieeoperationen des Quantensystems, die bei Berücksichtigung von Überauswahlregeln zu $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ aus (2.6) isomorph ist. Die Homomorphismen von G in $\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ sind somit von zentraler Bedeutung für die Interpretierbarkeit von G als Symmetriegruppe eines Quantensystems (vgl. (2.9)); sie sind eine - durch Überauswahlregeln bedingte - Verallgemeinerung des geläufigen

+) Für Symmetrieeoperationen, die eine Vertauschung von ein- und auslaufenden Teilchen bewirken, wird diese Forderung in 6.2. verallgemeinert.

gen Konzepts der Strahldarstellungen oder projektiven Darstellungen von Gruppen. Für diese Homomorphismen führen wir der kürzeren Ausdrucksweise wegen einen eigenen Namen ein, im Gegensatz zu den Automaten [11], [34], die mit den prinzipiell gleichen Objekten arbeiten.

(3.0) Def: Seien G eine Gruppe und $\tilde{U}(H, P_I)$ wie in (2.6), $\tilde{U}(H)$ wie in (2.7). Dann nennen wir einen Homomorphismus $G \rightarrow \tilde{U}(H, P_I)$ eine Bündeldarstellung (kurz: BD), einen Homomorphismus $G \rightarrow \tilde{U}(H)$ eine Strahldarstellung (SD) und einen Homomorphismus $G \rightarrow \mathcal{U}_+(H)$ eine unitäre Strahldarstellung (USD) von G .

SDen sind also spezielle BDen, nämlich solche auf Hilberträumen ohne Überauswahlregeln. Um von offensichtlich unwesentlichen Zügen einer speziellen Realisierung zu abstrahieren, führen wir einen natürlichen Äquivalenzbegriff für BDen ein.

(3.1) Def: Zwei BDen $\tilde{U}^{(k)}: G \rightarrow \tilde{U}(H^{(k)}, P_{I(k)}^{(k)})$, $k=1,2$, einer Gruppe G heißen äquivalent, wenn gilt (s.(2.3))
 $\exists U \in \mathcal{U}(H^{(1)}, P_{I(1)}^{(1)}; H^{(2)}, P_{I(2)}^{(2)}) (\forall g \in G (U^{(2)}(g) = U U^{(1)}(g) U^{-1}))^+$;

ist dabei U unitär, so nennen wir $\tilde{U}^{(1)}$ und $\tilde{U}^{(2)}$ unitäräquivalent. Anstelle der Elemente von $\tilde{U}(H, P_I)$, die ja Operatormengen sind, rechnet man zur Vereinfachung häufig mit Repräsentanten derselben. Das führt zu folgender Definition.

(3.2) Def: Seien $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H, P_I)$ eine BD der Gruppe G und für jedes $g \in G$ $U(g)$ ein Element (Repräsentant) der Operatormenge $\tilde{U}(g)$, wobei für das Einselement e gelte: $U(e) = 1_H$. Dann nennen wir die Abbildung $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H, P_I)$, $g \mapsto U(g)$, eine Version von U^{++} .

Eine Abbildung $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H, P_I)$ ist offenbar genau dann eine Version einer BD, wenn gilt: $\forall g, g' \in G (U(g)U(g')(U(gg'))^{-1} \in \mathcal{C}(H, P_I), U(e) = 1_H)$. Natürlich hat jede BD unendlich viele Versionen.

Trägt G eine vom physikalischen Standpunkt natürliche Topologie, wie es bei der Poincarégruppe aufgrund ihrer Bedeutung als Transformationsgruppe offensichtlich ist, so wird man entsprechend dem Prinzip "natura non facit saltus" verlangen, daß eine kleine Ände-

+) Die Multiplikation von Operatoren mit Elementen aus $\tilde{U}$ ist zu verstehen als $U[V] := [UV]$.

++) In [25] wird dieser Begriff für SDen eingeführt.

zung des Gruppenelements g eine kleine Änderung der per BD zugeordneten Symmetrieeoperation bewirkt. Um dies präzisieren zu können, führen wir auf der Gruppe der Symmetrieeoperationen eine Topologie ein und zwar durch folgende höchst plausible Forderung: Eine Abbildung τ eines beliebigen topologischen Raumes T in $\mathcal{P}(H, P_I)$ soll genau dann stetig sein, wenn für alle Zustände $P_x, P_y \in \mathcal{O}_1(H, P_I)$ die Abbildung $T \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Sp}(P_x \tau_t(P_y))$, die jedem $t \in T$ die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen dem Zustand P_x und dem transformierten Zustand $\tau_t(P_y)$ zugeordnet, stetig ist. Für $\tilde{u}(H, P_I)$ bedeutet das:

(3.3) Def: $\tilde{u}(H, P_I)$ sei stets mit der Initialtopologie bzgl. der Abbildungsfamilie

$$(\phi_{x,y})_{x,y \in \mathcal{Z}(H, P_I)}, \phi_{x,y}: \tilde{u}(H, P_I) \rightarrow \mathbb{R}, [U] \mapsto |\langle x | U y \rangle|, \text{ versehen.}$$

Die damit für BDen erklärte Eigenschaft "stetig" kürzen wir mit C (continuous) ab.

Daraus resultiert folgendes handliche Kriterium für die Stetigkeit von BDen.

(3.4) Satz: Seien G eine topologische Gruppe und

$\tilde{u}: G \rightarrow \tilde{u}(H, P_I), g \mapsto [U(g)],$ eine BD. Dann ist $\tilde{u}$ genau dann stetig, wenn für alle $x, y \in \mathcal{Z}(H, P_I)$ die Abbildung $G \rightarrow \mathbb{R}, g \mapsto |\langle x | U(g) y \rangle|$, stetig ist.

Für (3.10) ist wesentlich, daß $\tilde{u}(H, P_I)$ kein zusammenhängender topologischer Raum ist. Genauer gilt:

(3.5) Satz: Für jedes $i \in I$ ist durch $[U] \sim_1 [V] : \Leftrightarrow [U](i) = [V](i)$ eine Äquivalenzrelation auf $\tilde{u}(H, P_I)$ definiert. Die diesbezüglichen Äquivalenzklassen sind offene und abgeschlossene Teilmengen und $\tilde{u}(H, P_I)$ ist für $\text{card}(I) > 1$ nicht zusammenhängend.

Beweis: Die erste Aussage ist trivial. Seien $i \in I$ und $[U] \in \tilde{u}(H, P_I)$ beliebig und $j := [U](i)$. Dann gibt es ein $x \in H_i$ und $y \in H_j$; mit $|\langle y | U x \rangle| =: \varepsilon > 0$ und $\{[V] \in \tilde{u}(H, P_I) \mid |\langle y | V x \rangle| > \varepsilon/2\}$ ist eine Umgebung von $[U]$, deren Elemente alle zu derselben Äquivalenzklasse wie $[U]$ gehören. Damit ist jede Äquivalenzklasse offen, und, da die Äquivalenzklassen eine Zerlegung von $\tilde{u}(H, P_I)$ bilden, auch abgeschlossen. Diese Zerlegung besteht, wie man sich leicht überlegt, aus $\text{card}(I)$ Äquivalenzklassen. ■

Um die Konstruktion von BDen auf die von SDen zurückführen zu können, benötigen wir noch den Begriff der direkten Summe von BDen.

(3.6) Def: Seien $\tilde{u}^{(k)}: G \rightarrow \tilde{u}(H^{(k)}, P_{(k)}^{(k)}), k=1, 2, \dots$, höchstens ab-

zählbar viele BDen der Gruppe G und für jedes k $U^{(k)}$ eine Version

von $\tilde{U}^{(k)}$. Weiter sei $(P_i')_{i \in I}, I' := \bigcup_k I^{(k)}$, die folgende Familie von Projektoren auf $H' := \bigoplus_k H^{(k)}$:

$$\forall i \in I^{(k)} \quad (P_i' := 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus P_i^{(k)} \oplus 0 \oplus \dots).$$

$\leftarrow k\text{-te Stelle}$

Dann ist die direkte Summe $\bigoplus_k U^{(k)}: G \rightarrow \mathcal{U}(H', P_i')$,

$g \mapsto \bigoplus_k U^{(k)}(g)$, Version einer BD, die wir als die direkte Summe

$\bigoplus_k \tilde{U}^{(k)}$ der BDen $\tilde{U}^{(k)}$ bezeichnen.

Man sieht leicht, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Versionen $U^{(k)}$ ist und tatsächlich eine BD liefert. Weiter folgt aus (3.4) sofort, daß die direkte Summe von BDen einer topologischen Gruppe G genau dann stetig ist, wenn jeder Summand stetig ist.

(3.7) Def: Eine BD $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ einer Gruppe G heißt transitiv, wenn es für alle $i, j \in I$ ein $g \in G$ gibt mit $\tilde{U}(g)i = j$. Ist $\tilde{U}$ transitiv und $n := \text{card}(I)$, so nennen wir $\tilde{U}$ eine n -Bündeldarstellung (n -BD). SDen sind also 1-BDen und eine BD ist genau dann transitiv, wenn sie sich nicht als direkte Summe schreiben läßt.

(3.8) Satz: Jede BD einer Gruppe ist eine direkte Summe von transitiven BDen.

Beweis: Seien G eine Gruppe, $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ eine BD und U eine Version von $\tilde{U}$. Nach (2.6) ist G mit der Wirkung $G \times I \rightarrow I, (g, i) \mapsto$

$U(g)i$, eine Transformationsgruppe auf I und zerlegt I in Bahnen: $I = \bigcup_{k \in K} I^{(k)}$, d.h. $\forall k \in K, i, j \in I^{(k)} (\exists g \in G (j = U(g)i))$. Mit $H^{(k)} := \bigoplus_{i \in I^{(k)}} (k)$

$P_{I_H, P_I}^{(k)} := P_I|_{H^{(k)}}$ ist für jedes $k \in K$ $\tilde{U}^{(k)}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H^{(k)}, P_{I^{(k)}}^{(k)}), \tilde{U}^{(k)}(g)$

$:= [U(g)|_{H^{(k)}}]$, eine transitive BD und es gilt: $\tilde{U} = \bigoplus_{k \in K} \tilde{U}^{(k)}$. ■

Der folgende Satz ist eine einfache Folge von (3.1).

(3.9) Satz: Seien $\tilde{U} = \bigoplus_{k \in K} \tilde{U}^{(k)}$ und $\tilde{U}' = \bigoplus_{k' \in K'} \tilde{U}'^{(k')}$ direkte Summen von transitiven BDen $\tilde{U}^{(k)}$ bzw. $\tilde{U}'^{(k')}$ einer Gruppe G . Dann sind $\tilde{U}$ und $\tilde{U}'$ genau dann äquivalent, wenn es eine Bijektion $K \rightarrow K', k \mapsto k'$, derart gibt, daß für alle $k \in K$ $\tilde{U}^{(k)}$ äquivalent zu $\tilde{U}'^{(k')}$ ist.

Wegen (3.8) und (3.9) erhält man durch Bildung direkter Summen bis auf Äquivalenz alle BDen einer Gruppe, wenn man bis auf Äquivalenz alle ihre transitiven BDen kennt.

(3.10) Struktursatz über n-Bündeldarstellungen⁺

Seien G eine (topologische) Gruppe und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gibt es (stetige) n -BDen von G genau dann, wenn G eine (offene) Untergruppe S mit $\text{card}(G/S) = n$ besitzt. Ist letzteres erfüllt, so ist jede (stetige) n -BD von G äquivalent zu einer der (stetigen) n -BDen $\tilde{U}_{\gamma\sigma}$, die man durch folgende Konstruktion erhält.

Man wähle jeweils einen Repräsentanten aus

- (a) jeder Konjugationsklasse⁺⁺) von (offenen) Untergruppen S mit $\text{card}(G/S) = n$; das Ergebnis sei die Familie $(S_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.
- (b) jeder Nebenklasse $gS_\gamma \in G/S_\gamma$; er werde bezeichnet mit $\underline{gS_\gamma}$ und so gewählt, daß $eS_\gamma = e$ gilt.
- (c) jeder Äquivalenzklasse von (stetigen) SDen von S_γ und wähle zu jedem solchen Repräsentanten $\tilde{V}_{\gamma\sigma}$ eine Version $V_{\gamma\sigma}$, deren zugehöriger Hilbertraum mit $H_{\gamma\sigma}$ bezeichnet werde; das Ergebnis sei die Familie $(V_{\gamma\sigma})_{\gamma \in \Gamma, \sigma \in \Sigma}$.

Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei $\mathcal{H}_{\gamma\sigma}$ der Hilbertraum der Abbildungen

$$f: G/S_\gamma \rightarrow H_{\gamma\sigma} \text{ mit } \langle f|f \rangle := \sum_{gS_\gamma \in G/S_\gamma} \langle f(gS_\gamma) | f(gS_\gamma) \rangle_{H_{\gamma\sigma}} < \infty; \text{weiter}$$

sei für jedes $gS_\gamma \in G/S_\gamma$ der Projektor $P_{gS_\gamma}: \mathcal{H}_{\gamma\sigma} \rightarrow \mathcal{H}_{\gamma\sigma}$ definiert durch

$$(P_{gS_\gamma} f)(g'S_\gamma) := \begin{cases} f(gS_\gamma) & \text{für } g'S_\gamma = gS_\gamma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann definiere man für jedes $\gamma \in \Gamma, \sigma \in \Sigma$ die BD

$$\tilde{U}_{\gamma\sigma}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H}_{\gamma\sigma}, P_{G/S_\gamma}) \text{ durch folgende Version } U_{\gamma\sigma}$$

$$(d) \forall g, h \in G, f \in \mathcal{H}_{\gamma\sigma} ((U_{\gamma\sigma}(g)f)(hS_\gamma) := V_{\gamma\sigma}((hS_\gamma)^{-1}g \underline{g^{-1}hS_\gamma})f(g^{-1}hS_\gamma)).$$

Dabei ist $\tilde{U}_{\gamma\sigma}$ genau dann äquivalent zu $\tilde{U}_{\gamma'\sigma'}$, wenn $\gamma = \gamma'$ und $\sigma = \sigma'$.

Beweis: Wir beweisen die topologische Variante des Satzes; die untopologische folgt dann trivialerweise. Daß die $\tilde{U}_{\gamma\sigma}$ stetige n -BDen sind, ist leicht nachzuprüfen; ebenso die Äquivalenzaussage am Ende des Satzes. Sei nun $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ eine stetige n -BD und U eine Version von $\tilde{U}$. Wir zeigen, daß $\tilde{U}$ eine offene Untergruppe S mit $\text{card}(G/S) = n$ besitzt und äquivalent ist zu einer der BDen $\tilde{U}_{\gamma\sigma}$. Dazu greifen wir $j \in I$ heraus und setzen $S^j := \{g \in G | \underline{U(g)}j = j\}$. Ist $[\tilde{U}(e)]_j$ die Äquivalenzklasse von $\tilde{U}(e)$ bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim_j$ aus (3.5), so gilt: $S^j = \tilde{U}^{-1}([\tilde{U}(e)]_j)$; somit ist S^j offen. Da G vermöge $\underline{U}$ transi-

⁺⁺) Das ist eine Klasse bzgl. folgender Äquivalenzrelation für Untergruppen von $G: S \sim S' : \Leftrightarrow \exists g \in G (gSg^{-1} = S')$.

⁺) Topologische Attribute in Klammern sind hier und in späteren Sätzen simultan mitzulesen oder simultan wegzulassen.

tiv auf I wirkt, gilt $\text{card}(G/S^j) = \text{card}(I) = n$. Daher gibt es $g \in \Gamma$ und $g' \in G$ mit $S_g = g' S^j g'^{-1}$; mit $i_o := \tilde{U}(g')j$ gilt dann: (1) $S_g = \{g \in G \mid U(g)i_o = i_o\}$. Die Abbildung $\lambda: G/S_g \rightarrow I, gS_g \mapsto \tilde{U}(g)i_o$, ist wegen (1) wohldefiniert und wegen der Transitivität von $\tilde{U}$ eine Bijektion.

Seien H' ein beliebiger Hilbertraum mit $\dim(H') = \dim(H_{i_o})$, $H_{i_o} := P_{i_o} H$,

$V: H_{i_o} \rightarrow H'$ eine beliebige unitäre oder antiunitäre Abbildung und

$\mathcal{H}'$ der analog zu $\mathcal{H}_{g_g}$ definierte Hilbertraum mit H' anstelle von H_{g_g} . Dann definieren wir $Q \in \mathcal{U}(H, P_I; \mathcal{H}', P_{G/S_g})$ durch:

$$(Q \sum_{i \in I} x_i)(gS_g) := V((U(gS_g))^{-1} x_{(gS_g)}), (Q^{-1}f)_i = U(\lambda^{-1}(i))V^{-1}f(\lambda^{-1}(i));$$

dabei haben wir die Elemente von H geschrieben als $\sum_{i \in I} x_i$ mit $x_i \in P_{i_o} H$.

Damit rechnet man leicht nach, daß gilt: $\forall g, h \in G (\exists \varphi(g, h) \in \mathbb{C}_1$
 $((QU(g)Q^{-1}f)(hS_g) = \varphi(g, h)VU((hS_g)^{-1}g \underline{g^{-1}hS_g})|_{H_{i_o}}V^{-1}f(g^{-1}hS_g)))$.

Folglich ist die Abbildung $S_g \ni S \mapsto [VU(S)|_{H_{i_o}}V^{-1}] \in \tilde{\mathcal{U}}(H)$ eine CSD von

S_g , und V , und damit H' , kann derart gewählt werden, daß sie mit einem der $\tilde{V}_{g_g}$ übereinstimmen.

(3.11) Korollar: Sei G eine zusammenhängende topologische Gruppe.

Dann gibt es für $n > 1$ keine stetige n -BD von G .

Beweis: S offene Untergruppe von G , G zusammenhängend $\implies G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n = S$.

Damit folgt die Behauptung aus (3.10).

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist also ein Verfahren zur Konstruktion aller BDen einer Gruppe aus deren transitiven BDen (vgl. (3.8) und (3.9)) und aller transitiven BDen einer Gruppe aus SDen gewisser Untergruppen davon (vgl. (3.10)).

3.2. Strahldarstellungen und Multiplikatordarstellungen

Die Wirkung einer Gruppe durch Symmetrieeoperationen eines Quantensystems wird, wenn keine Überauswahlregeln zu berücksichtigen sind, durch eine SD dieser Gruppe beschrieben, wobei der Darstellungsraum der Zustandsraum des Systems ist. Das Konzept der SD ist sowohl dem Physiker vertraut (zwar häufig in der wenig lichtvollen Interpretation als "mehrwertige Darstellung", z.B. der Drehgruppe), als auch mathematisch wohl untersucht. In diesem Abschnitt liegt das Gewicht auf den teilweise antiunitären SDen, die für die Diskussion diskreter Symmetrieeoperationen besonders wichtig sind. Die mit den Multi-

plikatorndarstellungen zusammenhängenden Begriffe werden in Hinblick auf die Ergebnisse in 3.3. - 3.5. eingeführt.

Wie schon bei den BDen (vgl. (3.11)) ermöglicht die Stetigkeit auch bei den SDen wesentliche Strukturaussagen. Um diese zu gewinnen, müssen wir zunächst einige topologische Fakten über die Gruppen $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ und $\mathcal{U}(H)$ feststellen.

(3.12) Def: Die Topologie auf $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ bzw. auf $\mathcal{U}(H)$ (s. (2.7)) sei die Initialtopologie bzgl. der Abbildungsfamilie $(\phi_{x,y})_{x,y \in \mathcal{Z}(H)}$ bzw. $(\phi_x)_{x \in \mathcal{Z}(H)}$ mit $\phi_{x,y}: \tilde{\mathcal{U}}(H) \rightarrow \mathbb{R}, [U] \mapsto |\langle x | Uy \rangle|$,
 $\phi_x: \mathcal{U}(H) \rightarrow \mathbb{R}, U \mapsto Ux$.

Die Topologie auf $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ ist also als Spezialfall in (3.3) enthalten und die auf $\mathcal{U}(H)$ ist gerade die starke Operatortopologie.

(3.13) Hilfssatz: Die Topologie auf $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ stimmt mit der Quotiententopologie von $\mathcal{U}(H)/\mathcal{C}(H)$ überein.

Beweis: Die Quotiententopologie heiße $\mathcal{Q}$ und die Topologie (3.12) heiße $\mathcal{W}$. Zu zeigen ist, daß die identische Abbildung von $(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{Q})$ auf $(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{W})$ in beiden Richtungen stetig ist. id: $(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{Q}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{W})$. Da $\mathcal{Q}$ die Finaltopologie bzgl. der natürlichen Abbildung $\pi: \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ ist, gilt: id stetig $\Leftrightarrow \phi_{x,y} \circ \text{id} \circ \pi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, U \mapsto |\langle x | Uy \rangle|$, stetig; letzteres gilt aber nach (3.12) offensichtlich.

id: $(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{W}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{Q})$. Für jedes $[U] \in \tilde{\mathcal{U}}$ ist, wie man mit (3.12) leicht sieht, die Abbildung $(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{W}) \rightarrow (\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{W}), [V] \mapsto [UV]$, stetig. Damit ist id stetig, wenn id in einem Punkt stetig ist, als den wir $\tilde{\mathcal{T}}$ wählen. Zunächst zeigen wir, daß es eine $\mathcal{W}$ -Umgebung N von $\tilde{\mathcal{T}}$ gibt, in der keine antiunitären Elemente liegen: Seien $x, y \in \mathcal{Z}(H)$ mit $\langle x | y \rangle = 0$, $\alpha_n := e^{i\pi n/2}$, $z_n := (x + \alpha_n^* y)/\sqrt{2}$, $z'_n := (x - \alpha_n^* y)/\sqrt{2}$, $n=1,2$ und $\varepsilon := 1/4$. Dann definieren wir N als die Menge der $[U] \in \tilde{\mathcal{U}}$, für die gilt:

- (1) $|1 - \langle x | Ux \rangle| < \varepsilon$, (2) $|1 - \langle y | Uy \rangle| < \varepsilon$,
- (3) $|\langle x | Uy \rangle| < \varepsilon$, (4) $|\langle y | Ux \rangle| < \varepsilon$,
- (5) $|\langle z_n | Uz'_n \rangle| < \varepsilon, n=1,2$.

N enthält offenbar $\tilde{\mathcal{T}}$ und ist offen in $\mathcal{W}$. Ist V ein antiunitärer Operator mit $[V] \in N$ und

$\langle x | Vx \rangle =: a$, $\langle y | Vy \rangle =: b$, $\langle x | Vy \rangle =: c$, $\langle y | Vx \rangle =: d$, so folgt aus (5):

$|a + \alpha_n b - \alpha_n c - \alpha_n^2 d| < 2$, daraus mit (3) und (4): $|a - \alpha_n^2 d| < 4\varepsilon$ und somit:

(6) $|a - \alpha_n^2 d| < 1, n=1,2$. Andererseits gilt: $|a - \alpha_n^2 d|^2 = |a|^2 + |d|^2 - 2|a||d|\cos(n\pi + \varphi)$ mit $a^*d = |a||d|e^{i\varphi}$. Nun gibt es ein $m \in \{1,2\}$ derart, daß $\cos(m\pi + \varphi) \leq 0$; damit und mit (1), (2) gilt $|a - \alpha_m^2 d|^2 \geq |a|^2 + |d|^2 \geq 2(1 - \varepsilon)^2 = 9/8$, im Widerspruch zu (6).

Wir kommen nun zum wesentlichen Schritt. Seien $\varepsilon > 0, x \in H$ mit $\|x\|^2 > \varepsilon, N'$

eine $\mathcal{W}$ -Umgebung von $\tilde{\gamma}$, die keinen antiunitären Operatorstrahl enthält, und N'' die $\mathcal{W}$ -Umgebung von $\tilde{\gamma}$ der Operatorstrahlen $[U] \in \tilde{\mathcal{U}}$, für die $|\langle x | Ux \rangle| > \varepsilon$ gilt. Wählt man dann aus jedem $[U] \in N' \cap N''$ den eindeutig bestimmten Repräsentanten $\mathcal{G}[U]$ mit $\langle x | \mathcal{G}[U]x \rangle = |\langle x | Ux \rangle|$, so ist die Abbildung $\mathcal{G}: N' \cap N'' \rightarrow \mathcal{U}$, $[U] \mapsto \mathcal{G}[U]$ stetig, wie in [1, p. 6, 7] bewiesen wird. Da $\pi: \mathcal{U} \rightarrow (\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{Q})$ stetig ist, ist $\pi \circ \mathcal{G} = \text{id}|_{N' \cap N''}$ eine stetige Abbildung in $(\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{Q})$. ■

(3.14) Satz: (a) $\mathcal{U}(H)$ und $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ sind topologische Gruppen.

(b) $\mathcal{U}_+(H)$ ist ein offener und abgeschlossener Normalteiler von $\mathcal{U}(H)$ und die zweielementige topologische Quotientengruppe $\mathcal{U}(H)/\mathcal{U}_+(H)$ ist diskret; das gleiche gilt für $\tilde{\mathcal{U}}_+(H)$ und $\tilde{\mathcal{U}}(H)$.

Beweis: (a): Wir beweisen die Behauptung für $\mathcal{U}(H)$, d.h. die Stetigkeit der Abbildungen

$p: \mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)$, $(U, V) \mapsto UV$, und $r: \mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)$, $U \mapsto U^{-1}$;

damit folgt die Behauptung für $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ wegen (3.13) bekanntermaßen.

Nach (3.12) sind p und r genau dann stetig, wenn für alle $x \in \mathcal{J}(H)$ die Abbildungen $\phi_x \circ p$ und $\phi_x \circ r$ stetig sind. Seien $(U_1, V_1)_{1 \in \mathbb{L}}$ eine

konvergente Moore-Smith-Folge mit Werten aus $\mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H)$ und $(U, V) := \lim_{1 \in \mathbb{L}} (U_1, V_1)$. Wegen der Stetigkeit der Projektionen

$\mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)$ gilt: $\lim_{1 \in \mathbb{L}} U_1 = U$, $\lim_{1 \in \mathbb{L}} V_1 = V$, d.h. $\forall x \in H$ $(\lim_{1 \in \mathbb{L}} \|U_1 x - Ux\| = 0$

$\lim_{1 \in \mathbb{L}} \|V_1 x - Vx\| = 0)$. Wegen $\|U_1 V_1 x - UVx\| \leq \|V_1 x - Vx\| + \|U_1 Vx - UVx\|$ und

$\|U_1^{-1} x - U^{-1} x\| = \|U_1 U^{-1} x - U U^{-1} x\|$ folgt $\forall x \in H$ $(\lim_{1 \in \mathbb{L}} U_1 V_1 x = UVx, \lim_{1 \in \mathbb{L}} U_1^{-1} x = U^{-1} x)$

und damit die Stetigkeit von p und r .

(b): Die algebraischen Aussagen sind trivial. Sei $x \in \mathcal{J}(H)$.

$\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{U}(H) \mid \|Ux - x\| < 1/2, \|U(ix) - ix\| < 1/2\}$ ist eine Umgebung von $1_H \in \mathcal{U}(H)$, die keinen antiunitären Operator enthält. Denn aus V antiunitär und $V \in \mathcal{U}_x$ folgt: $\|Vx - x\| < 1/2, \|Vx + x\| < 1/2$ und damit der Widerspruch: $2 = \|Vx + x\| = \|Vx + x + Vx - x\| \leq \|Vx + x\| + \|Vx - x\| < 1$. Somit ist 1_H innerer Punkt von $\mathcal{U}_+(H)$, also $\mathcal{U}_+(H)$ offen und damit abgeschlossen. Damit ist $\mathcal{U}(H)/\mathcal{U}_+(H)$ diskret bzgl. der Quotiententopologie. Da die natürliche Abbildung $\mathcal{U}(H) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H)$ wegen (a) und (3.13) offen ist, folgt die Offenheit von $\tilde{\mathcal{U}}_+(H)$. ■

Ist der Hilbertraum separabel, so kann man wesentlich weitergehende Aussagen machen.

(3.15) Satz⁺: Für jeden separablen Hilbertraum H gilt:

- (a) $\mathcal{U}(H)$ und $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ sind vollständige, metrisierbare topologische Gruppen mit abzählbarer Basis der Topologie.
- (b) Es gibt eine Borelfunktion⁺⁺) $\sigma: \tilde{\mathcal{U}}(H) \rightarrow \mathcal{U}(H)$ mit $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\tilde{\mathcal{U}}(H)}$, wobei $\pi: \mathcal{U}(H) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H)$ die natürliche Surjektion ist.

Beweis: Die Behauptung wird in [25, §2] bewiesen; dort trägt $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ die Quotiententopologie, die aber nach (3.13) mit der Topologie (3.12) übereinstimmt. ■

Als einfache Folgerung aus (3.14.b) ergibt sich eine Strukturaussage über Gruppen, die stetige teilweise antiunitäre SDen haben:

- (3.16) Satz: Seien G eine (topologische) Gruppe und $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H)$ eine (stetige) SD. Dann ist $G_+ := \{g \in G \mid \tilde{U}(g) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(H)\}$ ein (offener und abgeschlossener) Normalteiler von G und entweder ist $G_+ = G$ oder G/G_+ ist (topologisch) isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, d.h. G_+ ist ein Normalteiler vom Index 1 oder 2. Insbesondere ist eine CSD einer zusammenhängenden topologischen Gruppe stets unitär.

- (3.17) Def: G_+ aus (3.16) nennen wir die unitäre Untergruppe von G bzgl. $\tilde{U}$.

In (3.2) haben wir den Begriff der Version einer BD und damit auch einer SD eingeführt. Soweit die Theorie der SDen bisher zu konstruktiven Verfahren geführt hat, arbeitet sie durchwegs mit Versionen von SDen anstatt mit diesen selbst. Auch die Prozeduren, die nötig sind, um aus einer Einteilchentheorie eine Vielteilchentheorie zu konstruieren, lassen sich am einfachsten mit Hilfe von Versionen der zugrundeliegenden SDen formulieren. Wir bringen zunächst zwei Definitionen, deren Sinn aus dem anschließenden Satz erhellt.

- (3.18) Def: Seien G eine Gruppe und G_+ ein Normalteiler von G vom Index 1 oder 2. Dann heißt eine Abbildung $\omega: G \times G \rightarrow \mathbb{C}_1$ ein Multiplikator (genauer: G_+ -Multiplikator) von G , wenn gilt:

- (a) $\forall g, g', g'' \in G \quad (\omega(g, g'g'') \delta_g(\omega(g', g'')) = \omega(gg', g'') \omega(g, g'))$
mit $\delta_g(z) := z$ für $g \in G_+$ und $\delta_g(z) := z^*$ für $g \notin G_+$, und $\omega(e, e) = 1$, wobei e das Einselement von G ist.

+) Diesen Satz benötigen wir nicht direkt; er gibt aber für den vorbelasteten Leser den Hintergrund für Satz (3.29) ab, der wesentlich gebraucht wird.

++) Die Borelmengen auf einem topologischen Raum sind die Elemente der von den offenen Mengen erzeugten σ -Algebra. Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen heißt Borelfunktion oder borelsch, wenn das Urbild jeder Borelmenge eine Borelmenge ist.

Zwei G_+ -Multiplikatoren ω und ω' von G heißen trivialäquivalent, wenn es eine Funktion $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}_1$ gibt, mit der gilt:

- (b) $\forall g, g' \in G \quad (\omega'(g, g') = \omega(g, g') \varphi(g) \delta_g(\varphi(g')) / \varphi(gg'))$. Zwei G_+ -Multiplikatoren ω und ω' heißen äquivalent, wenn entweder ω' und ω oder ω' und ω^* trivialäquivalent sind.

(3.19) Bem: (a) Offenbar bilden die G_+ -Multiplikatoren von G mit der Multiplikation komplexwertiger Funktionen als Verknüpfung eine abelsche Gruppe. Diejenigen Multiplikatoren, die zum Einselement dieser Gruppe äquivalent sind, bilden einen Normalteiler.

(b) Aus (3.18.a) folgt:

$$\forall g \in G \quad (\omega(e, g) = \omega(g, e) = 1, \omega(g, g^{-1}) = \delta_g(\omega(g^{-1}, g))).$$

(3.20) Def: Seien G, G_+ und ω wie in (3.18). Dann heißt eine Abbildung $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ mit $\{g \in G \mid U(g) \in \mathcal{U}_+(H)\} = G_+$ und

$\forall g, g' \in G \quad (U(g)U(g') = \omega(g, g')U(gg'))$ eine ω -Darstellung (ω -D, genauer: (ω, G_+) -Darstellung) von G oder auch allgemein eine Multiplikator-darstellung (MD) von G . Ist ω der triviale Multiplikator, d.h. $\forall g, g' (\omega(g, g') = 1)$, so nennen wir eine ω -D eine eigentliche Darstellung (ED).

(3.21) Satz über den Zusammenhang von MDen und SDen

(a) Seien G, G_+, ω und U wie in (3.20). Dann ist $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H), g \mapsto [U(g)]$ eine SD von G und U ist eine Version von $\tilde{U}$.

(b) Seien $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H)$ eine SD der Gruppe G, G_+ die zugehörige unitäre Untergruppe (s. (3.17)) und $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ eine Version von $\tilde{U}$, d.h. $\forall g \in G \quad (U(g) \in \tilde{U}(g), U(e) = 1_H)$. Dann ist durch $\omega(g, g') \cdot 1_H := U(g)U(g')(U(gg'))^{-1}$ ein G_+ -Multiplikator von G definiert und U ist eine ω -D von G ; verschiedenen Versionen von U entsprechen trivialäquivalente Multiplikatoren. Eine SD von G bestimmt also genau eine Trivialäquivalenz-Klasse von G_+ -Multiplikatoren von G .

Beweis: (a) ist trivial. Daß ω aus (b) ein G_+ -Multiplikator ist, folgt leicht aus $\forall g, g', g'' \in G \quad ((U(g)U(g'))U(g'')) = U(g)(U(g')U(g''))$.

(3.22) Def: Eine MD $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ einer Gruppe G heißt irreduzibel (I), wenn die Operatormenge $\{U(g) \mid g \in G\}$ irreduzibel ist, d.h. wenn es keinen von H und $\{0\}$ verschiedenen Teilraum von H gibt, der unter dieser Operatormenge invariant ist. Eine SD heißt irreduzibel, wenn eine - und damit jede - ihrer Versionen eine irreduzible MD ist.

Um das übliche, als Schursche Lemma bekannte Irreduzibilitätskriterium auf Mengen semiunitärer Operatoren verallgemeinern zu können,

benötigen wir folgende interessante Aussage.

(3.23) Hilfssatz: Seien A ein linearer selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H und $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ seine Spektralschar. Dann gibt es eine komplexe Konjugation auf H , d.h. einen antiunitären Operator K auf H mit $K^2 = 1_H$, für die gilt: $KA = AK$,
 $\forall \lambda \in \mathbb{R} (KE_\lambda = E_\lambda K)$.

Beweis: Der Satz ist eine einfache Folge von [7, p.1209, 5. Theorem]. Wir verwenden die Bezeichnung aus [7, p.1208, 4. Definition] und definieren eine komplexe Konjugation K' auf $\sum_{\alpha} L_2(\mu_{\alpha})$ durch $(K' \xi_{\alpha})(\lambda) := (\xi_{\alpha}(\lambda))^*$. Ist U der Isomorphismus von H auf $\sum_{\alpha} L_2(\mu_{\alpha})$, so hat K' offenbar die gewünschten Eigenschaften für UAU^{-1} und $UE_{\lambda}U^{-1}$ anstelle von A und E_{λ} . $K := U^{-1}K'U$ ist damit die gesuchte komplexe Konjugation. ■

(3.24) Lemma von Schur: Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von semilinearen (d.h. linearen oder antilinearen) beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum H , für die gilt:

$$\forall B \in \mathcal{L} (\exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} (\alpha B^* \in \mathcal{L})).$$

Dann ist $\mathcal{L}$ genau dann irreduzibel, wenn für jeden linearen beschränkten, selbstadjungierten Operator A auf H gilt:

$$(\forall B \in \mathcal{L} (BA = AB)) \Rightarrow A = \alpha 1_H, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Für jeden semilinearen beschränkten Operator B und jeden linearen beschränkten selbstadjungierten Operator A mit Spektralschar $(E_{\lambda})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ gilt: (1) $(AB = BA \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} (E_{\lambda}B = BE_{\lambda}))$. Ist B linear, so verweisen wir hierfür z.B. auf [30, S. 507]; ist B antilinear, so wählen wir eine komplexe Konjugation K gemäß (3.23) mit $KAK = A$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} (KE_{\lambda}K = E_{\lambda})$ und folgern, da BK linear ist: $BA = AB \Leftrightarrow BKA = ABK \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} (BKE_{\lambda} = E_{\lambda}BK) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} (BE_{\lambda} = E_{\lambda}B)$. Weiter zeigt man leicht, daß ein Teilraum $L \subset H$ genau dann invariant unter $\mathcal{L}$ ist, wenn für den zugehörigen Projektor P_L gilt: $\forall B \in \mathcal{L} (P_L B = B P_L)$. Daraus folgt mit (1) und mit $(\{E_{\lambda} | \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0, 1_H\}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} (A = \alpha 1_H)$ die Behauptung. ■

Der Äquivalenzbegriff (3.1) für SDen legt die folgende Äquivalenzdefinition für MDen und damit für Versionen von SDen nahe.

(3.25) Def: Zwei MDen $U^{(k)}: G \rightarrow \mathcal{U}(H^{(k)})$, $k=1,2$, einer Gruppe G heißen äquivalent, wenn es einen unitären oder antiunitären Operator $U: H^{(1)} \rightarrow H^{(2)}$ gibt mit:
 $\forall g \in G (U^{(2)}(g) = U U^{(1)}(g) U^{-1})$; ist dabei U unitär, so heißen $U^{(1)}$ und $U^{(2)}$ unitäräquivalent.

Die Berechtigung dieser Definition und der Äquivalenzdefinition (3.18) für Multiplikatoren ergibt sich aus folgendem:

(3.26) Bem: (a) Zwei SDen sind genau dann äquivalent, wenn sie zwei äquivalente Versionen besitzen. Jedoch sind beliebige Versionen zweier äquivalenter SDen, ja nicht einmal derselben SD, nicht notwendig äquivalent.

(b) Die Multiplikatoren von Versionen äquivalenter bzw. unitäräquivalenter SDen sind äquivalent bzw. trivialäquivalent.

(c) Sind $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H)$ eine SD mit unitärer Untergruppe G_+ und U und U' Versionen von $\tilde{U}$ mit demselben Multiplikator, so gilt:

$$\forall g \in G (U'(g) = \zeta(g) U(g)), \text{ wobei } \zeta: G \rightarrow \mathbb{C}_1 \text{ eine Funktion ist, die}$$

$$\forall g, g' \in G (\zeta(g) \delta_g(\zeta(g')) = \zeta(gg')) \text{ mit } \delta_g \text{ aus (3.18.a) erfüllt.}$$

So einfach der Zusammenhang zwischen den SDen und ihren Versionen, den MDen, in algebraischer Hinsicht ist, so schwierig sind die topologischen Probleme, die bei CSDen auftreten. Dennoch gibt es zwei sehr schöne Resultate, die auf BARGMANN und MACKEY zurückgehen. In (3.27) - (3.29) wird der Hilbertraum als separabel vorausgesetzt; für die Topologie von $\tilde{U}(H)$ und $U(H)$ sei an (3.12) erinnert.

(3.27) Satz: [29.a, p.11] : Sei G eine zusammenhängende und einfachzusammenhängende Liegruppe. Dann besitzt jede CSD von G eine stetige Version und jede CMD von G ist Version einer CSD.

(3.28) Bem: Der Multiplikator ω einer CMD $U: G \rightarrow U(H)$ ist eine stetige Funktion von $G \times G$ in $\mathbb{C}_1$.

(3.29) Satz: [25; p.311, Theorem 3.1] : Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie. Dann besitzt jede CSD von G eine borelsche Version und jede borelsche MD von G ist Version einer CSD von G .

(3.30) Bem: Ist G wie in (3.29), so ist der Multiplikator jeder borelschen MD $U: G \rightarrow U(H)$ eine Borelfunktion von $G \times G$ in $\mathbb{C}_1$. Sowohl die volle Poincarégruppe als auch die volle Galilei- und Sittergruppe sind zwar Liegruppen; jedoch sind sie weder zusammenhängend, noch sind die jeweiligen Einskomponenten einfachzusammenhängend. Für diese Gruppen hat (3.27) somit keine direkte Bedeutung. Dagegen erfüllen die genannten Gruppen und nahezu alle in der Physik diskutierten Gruppen die Voraussetzungen von (3.29); Ausnahmen sind allerdings "unendlichdimensionale" Gruppen wie etwa die Gruppe der Eichtransformationen 2. Art in der Elektrodynamik. Wir benützen (3.29) im wesentlichen als praktisches Stetigkeitskriterium für SDen.

3.3. Erzeugung von Bündeldarstellungen durch Strahldarstellungen.

In 3.1. haben wir die Konstruktion von BDen auf diejenige von SDen zurückgeführt. Für gewisse Gruppen, zu denen, wie in 6.3. gezeigt wird, auch die volle Poincarégruppe gehört, gehen die transitiven BDen aus den SDen durch eine wesentlich einfachere Konstruktion hervor, d.h. sie werden von den SDen in folgendem Sinn erzeugt:

(3.31) Def: Sei $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H, P_I)$ eine BD der Gruppe G . Gibt es eine Version U von $\tilde{U}$ mit

(a) $\forall g \in G (U(g) \in \mathcal{U}(H))$,

(b) $\forall g, g' \in G (U(g)U(g')(U(gg'))^{-1} \in \mathcal{C}(H))$,

so nennen wir $\tilde{U}$ von der SD $G \rightarrow \tilde{U}(H), g \mapsto [U(g)]$, erzeugt.

(3.32) Bem: Man sieht leicht, daß mit jeder BD auch jede unitäräquivalente BD von einer SD erzeugt wird. Für äquivalente BDen gilt dies jedoch nicht notwendig.

Wir wollen nun untersuchen, welche BDen von SDen erzeugt werden.

Nach (3.8) ist jede BD direkte Summe von transitiven BDen und offenbar werden mit jeder BD auch alle ihre transitiven Summanden von SDen erzeugt; wir können uns also zunächst auf den transitiven Fall beschränken. Anschließend müssen wir noch untersuchen, wann eine direkte Summe von SDen (s.(3.6)) von einer SD erzeugt wird, m.a.W. wann sich SDen einer Gruppe G auf verschiedenen Hilberträumen zu einer SD von G auf deren Summen-Hilbertraum zusammensetzen lassen.

Wegen (3.32) ist die adäquate Fragestellung für den ersten Schritt: Welche transitiven BDen sind äquivalent zu BDen, die von einer SD erzeugt werden. Diese Frage behandeln wir jedoch nicht allgemein, sondern nur für Gruppen von einer speziellen Struktur, die bei der vollen Poincarégruppe ebenso wie bei der vollen Galilei- und de Sitter-Gruppe vorliegt.

(3.33) Satz: Es gelten die Bezeichnungen der topologischen Version von (3.10). Überdies seien speziell G eine Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie, n eine natürliche Zahl derart, daß jede offene Untergruppe S mit $\text{card}(G/S)=n$ ein offener Normalteiler ist und es für jeden solchen Normalteiler S eine Untergruppe T von G gibt mit $G=ST$ und $S \cap T=\{e\}$. Dann gilt:

(a) Sei T_x eine Untergruppe von G , die laut Voraussetzung zu S_x aus (3.10.a) gehört, so ist $h: T_x \rightarrow G/S_x, t \mapsto tS_x$, ein Homöomorphismus. Sei $\mathcal{H}'_{xS}$ der Hilbertraum der Abbildungen $f': T_x \rightarrow H_{xS}$, mit $\langle f' | f' \rangle := \sum_{t \in T_x} \langle f'(t) | f'(t) \rangle_{H_{xS}} < \infty$, so ist $\tilde{A}: \mathcal{H}_{xS} \rightarrow \mathcal{H}'_{xS}$,

$\forall t \in T_X ((\tilde{A}f)(t) := f(tS_X))$, eine unitäre Abbildung und für $U'_{Y\tilde{G}}(g) := \tilde{A}U_{Y\tilde{G}}(g)\tilde{A}^{-1}$ gilt, wenn die Repräsentanten der Nebenklassen aus G/S_X als $gS_X := h^{-1}(gS_X)$ gewählt werden:

- (1) $\forall s \in S_X, t, t' \in T_X ((U'_{Y\tilde{G}}(st)f')(t') = V_{Y\tilde{G}}(t'^{-1}st')f'(t'^{-1}t'))$.

Die stetige n-BD $\tilde{U}'_{Y\tilde{G}}$, von der $U'_{Y\tilde{G}}$ eine Version ist, ist also unitäräquivalent zu $\tilde{U}_{Y\tilde{G}}$.

- (b) Ist $H_{Y\tilde{G}}$ separabel, so ist die stetige n-BD $\tilde{U}'_{Y\tilde{G}}$ aus (1) genau dann äquivalent zu einer BD, die von einer CSD erzeugt wird, wenn gilt: Es gibt einen offenen Normalteiler G_+ von G vom Index 1 oder 2 und eine Funktion $\mathcal{G}: S_X \rightarrow \mathbb{C}_1$ derart, daß $s \mapsto \mathcal{G}(s)V_{Y\tilde{G}}(s)$ eine borelsche ω -Darstellung mit unitärer Untergruppe $S_X \cap G_+$ ist und ω oder ω^* sich zu einem G_+ -Multiplikator $\tilde{\omega}$ von G fortsetzen läßt.

- (c) Sind die Bedingungen aus (b) erfüllt, so ist eine borelsche Version $U''_{Y\tilde{G}}$ einer CSD, die eine zu $\tilde{U}'_{Y\tilde{G}}$ äquivalente BD erzeugt, gegeben durch:

- (2) $\forall s \in S_X; t, t' \in T_X; f' \in \mathcal{H}'_{Y\tilde{G}} ((U''_{Y\tilde{G}}(st)f')(t') := A(t')\tilde{\omega}^*(t'^{-1}, t')\tilde{\omega}(t'^{-1}, st)\tilde{\omega}(t'^{-1}st, t'^{-1}t')B\mathcal{G}(t'^{-1}st')V_{Y\tilde{G}}(t'^{-1}st')BA(t'^{-1}t')f'(t'^{-1}t'))$

Hierin ist mit einer beliebigen komplexen Konjugation K auf $H_{Y\tilde{G}}$:

$B := 1_{H_{Y\tilde{G}}}$ oder $B := K$ je nachdem, ob $\tilde{\omega}$ eine Fortsetzung von ω oder ω^* ist und $A(t) := 1_{H_{Y\tilde{G}}}$ für $t \in G_+$ und $A(t) := K$ für $t \in G \setminus G_+$.

Beweis: (a) Da T_X und G/S_X offensichtlich die diskrete Topologie tragen, ist h ein Homöomorphismus. Die übrigen Behauptungen sind einfach nachzurechnen.

(b) Seien $\tilde{U}_{Y\tilde{G}}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H^{\vee}, P_T^{\vee})$ eine zu $\tilde{U}'_{Y\tilde{G}}$ äquivalente BD, die von einer CSD erzeugt wird, $Q: \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H}'_{Y\tilde{G}}, P_{T_X}^{\vee}) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H^{\vee}, P_T^{\vee})$ der Äquivalenzoperator: $\forall g \in G (\tilde{U}_{Y\tilde{G}}^{\vee}(g) = QU_{Y\tilde{G}}^{\vee}(g)Q^{-1})$, $U_{Y\tilde{G}}^{\vee}$ eine borelsche Version einer CSD, die $\tilde{U}_{Y\tilde{G}}$ erzeugt und G_+ ist die unitäre Untergruppe von G bzgl. $U_{Y\tilde{G}}^{\vee}$. Dann sind durch $s \mapsto U_{Y\tilde{G}}^{\vee}(s)|_{H_0}$ mit $H_0 := \{f' \in \mathcal{H}'_{Y\tilde{G}} | \forall t \in T_X \setminus \{e\} (f'(t) = 0)\}$ und $s \mapsto U_{Y\tilde{G}}^{\vee}(s)|_{H_0^{\vee}}$ mit $H_0^{\vee} := QH_0$ Versionen zweier äquivalenter SDen von S_X definiert. Die Funktion $\mathcal{G}: S_X \rightarrow \mathbb{C}_1$ sei erklärt durch $U_{Y\tilde{G}}^{\vee}(s)|_{H_0^{\vee}} = Q\mathcal{G}(s)U'_{Y\tilde{G}}(s)Q^{-1}|_{H_0^{\vee}}$. Dann ist $s \mapsto \mathcal{G}(s)U'_{Y\tilde{G}}(s)|_{H_0}$ eine borelsche MD von S_X mit unitärer Untergruppe $G_+ \cap S_X$; dasselbe gilt für $W: S_X \rightarrow \mathcal{U}(H_{Y\tilde{G}}), s \mapsto \mathcal{G}(s)V_{Y\tilde{G}}(s)$, da die Abbildung $R: H_{Y\tilde{G}} \xrightarrow{Q} H_{Y\tilde{G}}, f' \mapsto f'(e)$ ein Isomorphismus und $\mathcal{G}(s)V_{Y\tilde{G}}(s) = R\mathcal{G}(s)U'_{Y\tilde{G}}(s)R^{-1}$ ist. Da der Multiplikator von W mit dem von $U_{Y\tilde{G}}^{\vee}|_{S_X}$ oder mit dessen komplex konjugiertem übereinstimmt (je nachdem ob Q linear oder antilinear ist), und $U_{Y\tilde{G}}^{\vee}$ nach Voraussetzung eine borelsche MD von G ist, ist die Notwendigkeit der Bedingung in (b) bewiesen. Daß sie auch hin-

reichend ist, folgt aus (c).

(c) Es ist leicht zu sehen, daß (2) eine borelsche Version einer zu $\tilde{U}_{\mathcal{S}\mathcal{G}}$ äquivalenten BD ist. Weiter findet man, daß $U_{\mathcal{S}\mathcal{G}}(g)$ für $g \in G_+$ unitär und $g \in G \setminus G_+$ antiunitär ist, denn $V(t'^{-1}st')$ bzw. $A(t')A(t'^{-1}t')$ ist unitär für $s \in G_+$ bzw. $t \in G_+$ und antiunitär für $s \in G \setminus G_+$ bzw. $t \in G \setminus G_+$, weiter ist $S_{\mathcal{S}}/G_+ \cap S_{\mathcal{S}}$ nach dem sog. ersten Isomorphiesatz isomorph zu $S_{\mathcal{S}}G_+/G_+$, so daß $G_+ \cap S_{\mathcal{S}}$ in $S_{\mathcal{S}}$ Normalteiler vom Index 1 oder 2 ist. Wegen der Wahl von B und $\mathcal{G}$ ist $s \mapsto B\mathcal{G}(s)V(s)B$ eine $\tilde{\omega}|S \times S$ -Darstellung von $S_{\mathcal{S}}$. Damit findet man leicht, daß die Relation $\forall t, t', t'' \in T_{\mathcal{S}}; s, s' \in S_{\mathcal{S}} ((U_{\mathcal{S}\mathcal{G}}(st)U_{\mathcal{S}\mathcal{G}}(s', t')f)(t'') = \tilde{\omega}(st, s't'')(U_{\mathcal{S}\mathcal{G}}(sts't'')f)(t''))$ äquivalent ist zu $\forall t, t', t'' \in T_{\mathcal{S}}; s, s' \in S_{\mathcal{S}} (\tilde{\omega}(t''^{-1}, st)\tilde{\omega}(t''^{-1}st, t'^{-1}t'')\tilde{\omega}(t''^{-1}st'', t''^{-1}ts't'^{-1}t'')) = \delta_{t''^{-1}st, t''^{-1}t'}\tilde{\omega}(t''^{-1}t, t'^{-1}t'')\tilde{\omega}(t''^{-1}t, s't')\tilde{\omega}(t''^{-1}ts't', t'^{-1}t'^{-1}t'')) = \tilde{\omega}(t''^{-1}, sts't'')\omega(t''^{-1}sts't', t'^{-1}t'^{-1}t'')\delta_{t''}(\tilde{\omega}(st, s't''))$, mit δ aus (3.18) und diese Gleichung folgt durch mehrfache Anwendung von (3.18.a). ■

Der noch zu diskutierende zweite Schritt hat eine ziemlich triviale Lösung:

(3.34) Satz: Seien G eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie und $\tilde{U}^{(k)}: G \rightarrow \tilde{U}(H^{(k)})$, $k=1,2,\dots$, höchstens abzählbar viele CSDen auf separablen Hilberträumen $H^{(k)}$. Dann wird die CBD $\bigoplus_k \tilde{U}^{(k)}$ genau dann von einer CSD $G \rightarrow \tilde{U}(\bigoplus_k H^{(k)})$ erzeugt, wenn die unitären Untergruppen der $\tilde{U}^{(k)}$ übereinstimmen und es für jedes k eine borelsche Version $U^{(k)}$ von $\tilde{U}^{(k)}$ gibt, derart, daß die Multiplikatoren der $U^{(k)}$ übereinstimmen.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingungen ist offensichtlich. Umgekehrt wird durch $g \mapsto \bigoplus_k U^{(k)}(g)$ eine borelsche Version einer SD definiert, die $\bigoplus_k \tilde{U}^{(k)}$ erzeugt. ■

(3.35) Def: Seien G und $\tilde{U}^{(k)}$, $k=1,2,\dots$, wie in (3.34). Dann nennen wir jede CSD, die $\bigoplus_k \tilde{U}^{(k)}$ erzeugt, eine direkte Strahlsumme der $\underline{U}^{(k)}$ und schreiben $\bigoplus_k \tilde{U}^{(k)}$.

(3.36) Bem: (a) Für beliebige SDen einer Gruppe gibt es zwar stets die in (3.6) definierte direkte Summe, aber nicht notwendig eine direkte Strahlsumme.

(b) Für eine vorgegebene Menge von SDen einer Gruppe kann es mehrere direkte Strahlsummen geben (vgl. (3.37)); die i.allg. nicht äqui-

valent sind.

(3.37) Satz: Seien $G, \tilde{U}^{(k)}, U^{(k)}$ wie in (3.34) und seien die dortigen Bedingungen erfüllt. Weiter seien G_+ die gemeinsame unitäre Untergruppe der $\tilde{U}^{(k)}$ und $\text{Ch}(G, G_+)$ die Gruppe der Borelfunktionen $\lambda: G \rightarrow \mathbb{C}_1$ mit

(a) $\forall g \in G_+, g' \in G (\lambda(g)\lambda(g') = \lambda(gg'))$,
 $\forall g \in G \setminus G_+, g' \in G (\lambda(g)\lambda^*(g') = \lambda(gg'))$. Dann ist für eine beliebige Abbildung $k \mapsto \lambda_k$ in $\text{Ch}(G, G_+)$ durch $g \mapsto \bigoplus_k \lambda_k(g) U^{(k)}(g)$ eine

borelsche (ω, G_+) -D von G definiert, wobei ω der Multiplikator einer der $U^{(k)}$ ist, und jede direkte Strahlsumme der $\tilde{U}^{(k)}$ hat eine Version der angegebenen Form.

Beweis: Zwei borelsche Versionen einer Strahldarstellung von G mit unitärer Untergruppe G_+ , die denselben Multiplikator haben, unterscheiden sich nach (3.26.c) für jedes $g \in G$ um eine Faktor $\lambda(g)$ derart, daß $\lambda \in \text{Ch}(G, G_+)$ ist.

Mit (3.37) haben wir einen Überblick über alle direkten Strahlsummen von SDen, für die eine direkte Strahlsumme überhaupt existiert. Ob die nach (3.37) konstruierten verschiedenen direkten Strahlsummen als SDen äquivalent sind oder nicht ist bestenfalls im konkreten Fall einfach zu klären. Besteht insbesondere $\text{Ch}(G, G_+)$ nur aus der trivialen Funktion $\lambda: g \mapsto 1$, so ist die direkte Strahlsumme eindeutig.

Für die spätere Anwendung betrachten wir die Strahlsumme zweier SDen der Kleinschen Vierergruppe, d.h. der abelschen Gruppe

$$K_4 := \{1_0 (\text{Einselement}), I_s, I_t, I_{st}\}, I_s^2 = I_t^2 = I_0, I_s I_t = I_{st}.$$

(3.38) Satz: Für jedes $\lambda \in \text{Ch}(K_4, K_{4+})$ mit $K_{4+} := \{I_0, I_s\}$ gibt es

$\varepsilon \in \{1, -1\}$ und $\alpha \in \mathbb{C}_1$ derart, daß gilt:

$$\lambda(I_0) = 1, \lambda(I_s) = \varepsilon, \lambda(I_t) = \alpha, \lambda(I_{st}) = \varepsilon\alpha.$$

Beweis: Leichte Folgerung aus (3.37.a).

(3.39) Satz: Seien $\tilde{U}^{(1)}: K_4 \rightarrow \tilde{U}^{(H^{(1)})}$, $i=1,2$, SDen mit unitärer Untergruppe $K_{4+} := \{I_0, I_s\}$ und $U^{(i)}$ Versionen von $\tilde{U}^{(i)}$, deren Multiplikatoren übereinstimmen. Dann ist jede direkte Strahlsumme von $\tilde{U}^{(1)}$ und $\tilde{U}^{(2)}$ unitäräquivalent zu einer, die für $\varepsilon \in \{1, -1\}$ durch folgende Version definiert wird:

$$\begin{aligned} I_o &\mapsto \begin{pmatrix} U^{(1)}(I_o) & 0 \\ 0 & U^{(2)}(I_o) \end{pmatrix}, \quad I_s \mapsto \begin{pmatrix} U^{(1)}(I_s) & 0 \\ 0 & \varepsilon U^{(2)}(I_s) \end{pmatrix}, \\ I_t &\mapsto \begin{pmatrix} U^{(1)}(I_t) & 0 \\ 0 & U^{(2)}(I_t) \end{pmatrix}, \quad I_{st} \mapsto \begin{pmatrix} U^{(1)}(I_{st}) & 0 \\ 0 & \varepsilon U^{(2)}(I_{st}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Beweis: Nach (3.37) und (3.38) hat jede direkte Strahlsumme von $\tilde{U}^{(1)}$ und $\tilde{U}^{(2)}$ eine Version, die aus der angegebenen durch die Ersetzung $U^{(2)}(I_t) \rightarrow \alpha U^{(2)}(I_t), U^{(2)}(I_{st}) \rightarrow \alpha U^{(2)}(I_{st}), \alpha \in \mathbb{C}_1$ hervorgeht. Eine unitäre Transformation mit $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^* \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(H^{(1)} \oplus H^{(2)}), a \in \mathbb{C}_1, a^4 = \alpha$ liefert nach Umwahl der Repräsentanten die angegebene Version. ■

3.4. Konstruktion der irreduziblen Strahldarstellungen einer Gruppe aus denen ihrer Normalteiler vom Index 2

Wir haben in (3.16) gesehen, daß eine Gruppe, die semiunitäre aber nicht unitäre SDen besitzt, stets einen Normalteiler vom Index 2 hat, der unitär dargestellt wird. In diesem Abschnitt beweisen wir einen Satz, mit dessen Hilfe man alle ISDen einer Gruppe bestimmen kann, wenn die UISDen aller Normalteiler vom Index 2 bekannt sind. Damit ist zweierlei erreicht:

1. Die Konstruktion der semiunitären ISDen einer beliebigen Gruppe ist auf diejenigen ihrer UISDen zurückgeführt.
2. Alle ISDen der vollen Poincarégruppe $\mathcal{P}$ können aus denjenigen der zusammenhängenden Gruppe $\mathcal{P}_o$ konstruiert werden, da $\mathcal{P}_o \cup \mathcal{P}_o I_s$ von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}_o$ von $\mathcal{P}_o \cup \mathcal{P}_o I_s$ jeweils Normalteiler vom Index 2 sind. Entsprechendes gilt für die volle Galileigruppe und für die volle de Sittergruppe.

Unseren Satz zerlegen wir der Übersichtlichkeit halber in zwei Teile. Der erste Teil ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von CLIFFORD ([5], [3]) über endlichdimensionale EDen und der zweite Teil verallgemeinert einen Satz von WIGNER ([36, p.336ff], s. auch [3]) über semiunitäre endlichdimensionale EDen (dort corepresentations genannt). Eine Formulierung des Satzes ohne Beweis und eine Anwendung auf die volle Galileigruppe findet sich in [4].

(3.40.1) Satz⁺: Seien G eine (lokal kompakte) Gruppe (mit abzählbarer Basis der Topologie) mit einem (offenen) Normalteiler G_o vom

+) vgl. Fußnote zu (3.10)

Index 2 und $d \in G \setminus G_0$.

Dann gilt für jede (stetige) UISD $U_0: G_0 \rightarrow \tilde{U}_+(H)$ auf einem (separablen) Hilbertraum H mit einer (borelschen) Version

$U_0: G_0 \rightarrow \mathcal{U}_+(H)$ und zugehörigem Multiplikator ω :

(a) Erfüllt $\tilde{U}_0$ die Bedingung

$\alpha) \exists \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{U}}_+(H) (\tilde{V}^2 = \tilde{U}_0(d^2), \forall g \in G_0 (\tilde{U}_0(g) = \tilde{V} \tilde{U}_0(d^{-1}gd) \tilde{V}^{-1})),$

so ist für jedes $\tilde{V}$ aus α) die Abbildung

$\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_+(H), \forall g \in G_0 (\tilde{U}(g) := \tilde{U}_0(g), \tilde{U}(gd) := \tilde{U}_0(g) \tilde{V}),$

eine (stetige) UISD. Für eine zu $\tilde{U}_0$ äquivalente SD $\tilde{U}'_0$ kann man $\tilde{V}'$ so wählen, daß $\tilde{U}'$ äquivalent ist zu $\tilde{U}$.

(b) Erfüllt ω die Bedingung

$\beta) \forall g \in G_0 (\exists \zeta(g) \in \mathbb{C}_1 (\zeta(g)d^2 = 1, \omega(g, d^2)/\omega(d^2, d^{-2}gd^2) = \zeta(g)\zeta(d^{-1}gd),$
 $\forall g' \in G_0 (\omega(g, g')/\omega(d^{-1}gd, d^{-1}g'd) = \zeta(g)\zeta(g')/\zeta(gg'))),$

so ist für jede (borelsche) Funktion $\zeta: G_0 \rightarrow \mathbb{C}_1$ aus β) die Abbildung $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_+(H \oplus H),$

$$\forall g \in G_0 (\tilde{U}(g) := \tilde{1} \begin{pmatrix} \tilde{U}_0(g) & 0 \\ 0 & \zeta(g)\tilde{U}_0(d^{-1}gd) \end{pmatrix}, \tilde{U}(gd) := \tilde{U}(g) \begin{pmatrix} 0 & \tilde{U}_0(d^2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}),$$

eine (stetige) USD und genau dann irreduzibel, wenn α) nicht erfüllt ist. Dabei ist die spezielle Wahl der (borelschen) Version U_0 ohne Belang, da jede andere mit entsprechend anderem ζ dasselbe $\tilde{U}$ liefert. Für eine zu $\tilde{U}_0$ äquivalente SD $\tilde{U}'_0$ kann man U'_0 und ζ' so wählen, daß $\tilde{U}'$ äquivalent ist zu $\tilde{U}$.

(c) Jede (stetige) UISD von G ist unitäräquivalent zu einer der in (a) und (b) definierten SDen.

Der entsprechende Satz für die SDen von G mit unitärer Untergruppe G_0 lautet:

(3.40.II) Satz: Seien $G, G_0, d, H, U_0, \tilde{U}_0, \omega$ wie in (3.40.I) und K eine komplexe Konjugation (s. (3.23)) auf H . Dann gilt:

(d) Erfüllt $\tilde{U}_0$ die Bedingung

$\gamma) \exists \tilde{W} \in \tilde{\mathcal{U}}_-(H) (\tilde{W}^2 = \tilde{U}_0(d^2), \forall g \in G_0 (\tilde{U}_0(g) = \tilde{W} \tilde{U}_0(d^{-1}gd) \tilde{W}^{-1})),$

so ist für jedes $\tilde{W}$ aus γ) die Abbildung

$\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H), \forall g \in G_0 (\tilde{U}(g) := \tilde{U}_0(g), \tilde{U}(gd) := \tilde{U}_0(g) \tilde{W}),$

eine (stetige) ISD mit unitärer Untergruppe G_0 . Für eine zu $\tilde{U}_0$ äquivalente SD $\tilde{U}'_0$ kann $\tilde{W}'$ so wählen, daß $\tilde{U}'$ äquivalent ist zu $\tilde{U}$.

(e) Erfüllt $\tilde{U}_0$ die Bedingung γ), so ist für jedes $\tilde{W}$ aus γ) mit dem Repräsentanten $W \in \mathcal{U}_-(H)$, jeden (borelschen) Homomorphismus

$\chi: G_0 \rightarrow \mathbb{C}_1$ mit $\forall g \in G_0 (\chi(g) = \chi(d^{-1}gd))$ und jedes $\xi \in \{1, -1\}$ die Abbildung

$$\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H \oplus H),$$

$$\forall g \in G_0 \quad (\tilde{U}(g) := \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} U_0(g) & 0 \\ 0 & \chi(g)U_0(g) \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}(gd) := \tilde{U}(g) \begin{pmatrix} 0 & w \\ \varepsilon \sqrt{\chi(d^2)}w & 0 \end{pmatrix},$$

eine (stetige) SD mit unitärer Untergruppe G_0 und genau dann irreduzibel, wenn es kein $D \in \tilde{U}_+(H)$ gibt mit

$$\delta) \quad \forall g \in G_0 \quad (U_0(g) = \chi(g)DU_0(g)D^{-1}), w = \varepsilon \sqrt{\chi(d^2)}DwD.$$

Für eine zu $\tilde{U}_0$ äquivalente SD $\tilde{U}'_0$ kann man $U'_0, \tilde{w}', \chi', \varepsilon'$ so wählen, daß $\tilde{U}'$ äquivalent ist zu $\tilde{U}$.

(f) Erfüllt ω die Bedingung:

$$\varepsilon) \quad \forall g \in G_0 \quad (\exists \vartheta(g) \in \mathbb{C}_1 \quad (\omega(g, d^2)/\omega(d^2, d^{-2}gd^2) = \vartheta(g)/\vartheta(d^{-1}gd), \\ \forall g' \in G_0 \quad (\omega(g, g')\omega(d^{-1}gd, d^{-1}g'd) = \vartheta(g)\vartheta(g')/\vartheta(gg'))),$$

so ist für jede (borelsche) Funktion $\vartheta: G_0 \rightarrow \mathbb{C}_1$ aus ε) und jedes $\eta \in \{1, -1\}$ die Abbildung

$$\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H \oplus H),$$

$$\forall g \in G_0 \quad (U(g) := \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} U_0(g) & 0 \\ 0 & \vartheta(g)KU_0(d^{-1}gd)K \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}(gd) := \tilde{U}(g) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta}{\sqrt{\vartheta(d^2)}}U_0(d^2)K \\ K & 0 \end{pmatrix})$$

eine (stetige) SD mit unitärer Untergruppe G_0 . $\tilde{U}$ ist irreduzibel, wenn γ) nicht erfüllt ist, und unitäräquivalent zu einer, der in (e) definierten SDen, wenn γ) erfüllt ist. Die spezielle Wahl der (borelschen) Version U_0 und der komplexen Konjugation K ist ohne Bedeutung, da ein anderes U_0 mit entsprechend anderem ϑ dasselbe $\tilde{U}$, und ein anderes K eine zu $\tilde{U}$ unitäräquivalente SD von G liefert. Für eine zu $\tilde{U}_0$ äquivalente SD $\tilde{U}'_0$ kann man $U'_0, \vartheta', K', \eta'$ so wählen, daß $\tilde{U}'$ äquivalent ist zu $\tilde{U}$.

(g) Jede (stetige) ISD von G mit unitärer Untergruppe G_0 ist unitäräquivalent zu einer der in (d), (e) und (f) definierten SDen.

Um den Beweis dieses Satzes übersichtlicher zu gestalten, stellen wir ihm einige wesentliche Schlüsse als Hilfssätze voraus.

(3.41) Hilfssatz: Seien G eine (topologische) Gruppe, $G_0 \subset G$ ein (offener) Normalteiler vom Index 2, $d \in G \setminus G_0$ und $\tilde{U}_0: G_0 \rightarrow \tilde{U}_+(H)$ eine (stetige) USD. Dann gibt es eine (stetige) SD $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H)$ mit $\tilde{U}|_{G_0} = \tilde{U}_0$ genau dann, wenn gilt:

(a) $\exists \tilde{v} \in \tilde{U}(H) \quad (\tilde{v}^2 = \tilde{U}_0(d^2), \quad \forall g \in G_0 \quad (\tilde{U}_0(g) = \tilde{v}\tilde{U}_0(d^{-1}gd)\tilde{v}^{-1})),$
und $\tilde{U}$ hat dann folgende Gestalt:

(b) $\forall g \in G_0 \quad (\tilde{U}(g) = \tilde{U}_0(g), \tilde{U}(gd) = \tilde{U}_0(g)\tilde{v}).$

Für $\tilde{v} \in \tilde{U}_+(H)$ ist U unitär und für $\tilde{v} \in \tilde{U}_-(H)$ ist $\tilde{U}$ semiunitär mit unitärer Untergruppe G_0 .

Beweis: Jede SD $\tilde{U}$ von G mit $\tilde{U}|_{G_0} = \tilde{U}_0$ erfüllt offensichtlich die Bedingung (a) mit $\tilde{V} := \tilde{U}(d)$. Daß umgekehrt, wenn (a) gilt, die aus $\tilde{U}_0$ nach (b) konstruierte Abbildung $\tilde{U}$ eine SD ist, rechnet man leicht nach. Weil G_0 offen ist, sind die Abbildungen $R: G \rightarrow \tilde{U}(H), R(g) := 1_H$ für $g \in G_0, R(g) := \tilde{V}$ für $g \in G \setminus G_0$ und $D: G \rightarrow G, D(g) := e$ für $g \in G_0, D(g) := d^{-1}$ für $g \in G \setminus G_0$, stetig. Wegen $\tilde{U}(g) = U_0(gD(g))R(g)$ und (3.14.a) ist auch $\tilde{U}$ stetig.

(3.42) Hilfssatz: Seien G eine Gruppe, $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H)$ eine SD und U eine Version von $\tilde{U}$. Dann ist $\tilde{U}$ genau dann irreduzibel, wenn für jeden linearen beschränkten selbstadjungierten Operator A auf H gilt:

$$(\forall g \in G (AU(g) = U(g)A)) \implies A = \alpha 1_H, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Triviale Folgerung aus (3.22) und (3.24).

(3.43) Hilfssatz: Seien G eine Gruppe und

(a) $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}_+(H)$ eine UISD. Dann gilt für jeden linearen, beschränkten Operator A auf H :

$$(\forall g \in G (\tilde{U}(g)A = A\tilde{U}(g))) \implies (A=0 \text{ oder } \exists \alpha \in \mathbb{R} (\alpha A \text{ unitär})).$$

(b) $G_0 \subset G$ ein Normalteiler vom Index 2, $d \in G \setminus G_0$ und $\tilde{U}_0: G_0 \rightarrow \tilde{U}_+(H)$ eine UISD, so gilt für jeden semilinearen beschränkten Operator A auf H :

$$\forall g \in G_0 (\tilde{U}_0(g)A = A\tilde{U}_0(d^{-1}gd)) \implies (A=0 \text{ oder } \exists \alpha \in \mathbb{R} (\alpha A \text{ semiunitär})).$$

Beweis: (a) Sei U eine Version von $\tilde{U}$ und ω ihr Multiplikator. Dann gilt: $\forall g \in G (\exists \zeta(g) \in \mathbb{C}_1 (U(g)A = \zeta(g)AU(g)))$. Damit folgt: $U(g)AA^+ = \zeta(g)AU(g)A^+ = \zeta(g)A(AU(g)^+)^+ = \zeta(g)A(AU(g^{-1})/\omega(g, g^{-1}))^+ = \zeta(g)A(\zeta(g^{-1})^*U(g)^{-1}A)^+ = \zeta(g)\zeta(g^{-1})AA^+U(g) = AA^+U(g)$; letzteres, da man leicht folgert: $\zeta(g)\zeta(g') = \zeta(gg'), \zeta(e) = 1$. Analog ergibt sich:

$\forall g \in G (U(g)A^+A = A^+AU(g))$. Damit und wegen der Irreduzibilität von $\tilde{U}$ folgt aus (3.42): $AA^+ = \alpha 1_H, A^+A = \beta 1_H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, woraus sich wegen $\sqrt{\alpha} = A^+ = \sqrt{\beta}$ für $\alpha = 0: A = 0$, und für $\alpha > 0: A/\sqrt{\alpha}$ unitär ergibt.

(b) Sei U_0 eine Version von $\tilde{U}_0$ und ω ihr Multiplikator. Dann gilt: $\forall g \in G_0 (\exists \zeta(g) \in \mathbb{C}_1 (U_0(g)A = \zeta(g)AU_0(d^{-1}gd)))$; daraus folgt: $\forall g, g' \in G_0 (\omega(g, g')/\delta(\omega(d^{-1}gd, d^{-1}g'd)) = \zeta(g)\zeta(g')/\zeta(gg'))$, wobei $\forall z \in \mathbb{C} (\delta(z) := z$ für A linear, $\delta(z) := z^*$ für A antilinear). Damit ergibt eine zu (a) analoge Rechnung: $\forall g \in G_0 (U_0(g)AA^+ = AA^+U_0(g), U_0(g)A^+A = A^+AU_0(g))$, woraus die Behauptung wie in (a) folgt, da $\|A\| = \|A^+\|$ auch für antilinear beschränkte Operatoren gilt.

(3.44) Hilfssatz: Seien G eine Gruppe, $G_0 \subset G$ ein Normalteiler vom Index 2 und $d \in G \setminus G_0$; weiter seien der Hilbertraum H direkte, aber nicht notwendig orthogonale Summe der Teilräume H_1 und H_2 und

$\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H)$ eine SD der Form

$$\forall g \in G_0 \quad (\tilde{U}(g) = \tilde{\gamma}_H \begin{pmatrix} U_1(g) & 0 \\ 0 & U_2(g) \end{pmatrix}, \quad \tilde{U}(gd) = \tilde{U}(g) \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}),$$

wobei $g \mapsto \tilde{\gamma}_{H_1} U_1(g)$ UISDen von G_0 auf $H_1, i=1,2$, und

$A: H_1 \rightarrow H_2, B: H_2 \rightarrow H_1$ entweder beide lineare oder beide antilineare Operatoren sind. Dann ist $\tilde{U}$ genau dann irreduzibel, wenn es keinen linearen beschränkten Operator $D: H_2 \rightarrow H_1$ gibt mit: $D \neq 0, BD^+ = DA, D^+B = AD, \forall g \in G_0 (U_1(g)D = DU_2(g))$; ist $\tilde{U}$ irreduzibel, so sind H_1 und H_2 orthogonal.

Beweis: Wegen $H = H_1 + H_2, H_1 \cap H_2 = \{0\}$ gibt es für jedes $x \in H$ eine eindeutige Zerlegung $x = x_1 + x_2, x_i \in H_i, i=1,2$, und jeden semilinearen Operator

$S: H \rightarrow H$ kann man schreiben als $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ wobei die $S_{ik}: H_k \rightarrow H_i$ gegeben sind durch $(Sx)_i = \sum_{k=1}^2 S_{ik} x_k$. Wir zeigen zunächst: Es gibt einen

linearen beschränkten Operator $M: H_2 \rightarrow H_1$ derart, daß $N := (MM^+ - 1)^{-1}$ existiert und für jeden semilinearen Operator S auf H gilt:

$$(1) \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 1 & M \\ M^+ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{11}^+ & S_{21}^+ \\ S_{12}^+ & S_{22}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & M \\ M^+ & 1 \end{pmatrix}$$

Dazu definieren wir in H neben dem vorhandenen Skalarprodukt $\langle, \rangle$ das weitere Skalarprodukt:

(2) $\forall x, y \in H (\langle x, y \rangle := \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle)$. Dann ist $\langle, \rangle$ in Bezug auf $\{, \}$ eine beschränkte, nicht ausgeartete hermitesche Bilinearform, so daß es einen beschränkten invertierbaren linearen Operator F auf H gibt mit: $\forall x, y \in H (\langle x, y \rangle = \langle x, Fy \rangle = \langle Fx, y \rangle)$; daraus folgt wegen $\forall x, y \in H_1 (\langle x, y \rangle = \{x, y\})$ die Existenz eines linearen beschränkten Operators $M: H_2 \rightarrow H_1$ mit (3) $F = \begin{pmatrix} 1 & M \\ M^+ & 1 \end{pmatrix}$. Man rechnet leicht nach, daß F

genau dann invertierbar ist, wenn $(MM^+ - 1)^{-1}$ existiert und daß dann gilt: $F^{-1} = \begin{pmatrix} -N & NM \\ M^+N & 1 - M^+NM \end{pmatrix}$. Die Adjungierten S^+ bzw. S^* eines semiunitären beschränkten Operators S bzgl. der Bilinearform $\langle, \rangle$ bzw.

$\{, \}$ sind definiert durch:

$\forall x, y \in H (\langle x, Sy \rangle = \langle S^+x, y \rangle, \{x, Sy\} = \{S^*x, y\})$ falls S linear,

$\forall x, y \in H (\langle x, Sy \rangle^* = \langle S^+x, y \rangle, \{x, Sy\}^* = \{S^*x, y\})$ falls S antilinear. Daraus folgt in beiden Fällen mit $\{x, Fy\} = \langle x, y \rangle$:

(4) $S^+ = F^{-1} S^* F$. Mit (2) rechnet man leicht nach:

$$(5) S^* = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^+ & S_{21}^+ \\ S_{12}^+ & S_{22}^+ \end{pmatrix}, \text{ woraus mit (3) sofort (1) folgt.}$$

Mit (1) findet man leicht:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}^{-1} \quad (6) \quad B^+ = B^{-1}, \quad (7) \quad BM^+ = MA, \quad (8) \quad M^+B = AM;$$

$$\begin{pmatrix} U_1(g) & 0 \\ 0 & U_2(g) \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} U_1(g) & 0 \\ 0 & U_2(g) \end{pmatrix}^{-1} \quad (9) \quad U_1(g)M = MU_2(g).$$

Da $\tilde{U}$ eine SD ist, gilt: $\tilde{U}(d)^2 = \tilde{U}(d^2) \Rightarrow \exists U_1(d^2) = BA, \exists \in \mathbb{C}_1, \xrightarrow{(6)} (10) \quad A^+ = A^{-1}$. Aus (5) folgt mit (6) und (10), daß $\tilde{U}$ auch in H mit $\{, \}$ als Skalarprodukt eine SD ist. Im folgenden betrachten wir $\tilde{U}$ in diesem Hilbertraum; dabei ändert sich Reduzibilität oder Irreduzibilität von $\tilde{U}$ nicht. Ein selbstadjungierter beschränkter Operator C hat dann wegen (5) die Form $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^+ & C_{22} \end{pmatrix}$ mit $C_{ii}^+ = C_{ii}, i=1,2$. Man rechnet leicht

nach, daß C genau dann mit allen Operatoren einer beliebigen Version von $\tilde{U}$ vertauscht, wenn gilt:

$C_{ii} = \alpha 1_H, \alpha \in \mathbb{R}, i=1,2, BC_{12}^+ = C_{12}A, \quad C_{12}^+B = AC_{12}, \forall g \in G_0 \quad (U_1(g)C_{12} = C_{12}U_2(g));$ dabei ist C genau dann ein Vielfaches von 1_H , wenn $C_{12} = 0$. Somit liefert (3.42) den ersten Teil der Behauptung.

Ist U irreduzibel, so muß M aus (3) wegen (7) - (9) der Nulloperator und somit $\langle, \rangle \equiv \{, \}$ sein, d.h. H_1 ist orthogonal zu H_2 . ■

Beweis von (3.40): Wir beweisen nur (3.40.II); der Beweis von (3.40.I) verläuft analog, nur wegen des Fehlens antiunitärer Operatoren etwas einfacher. Daß die in (d), (e), (f) angegebenen Abbildungen SDen mit unitärer Untergruppe G_0 sind, folgt für (d) unmittelbar aus (3.41) und für (e) bzw. (f) rechnet man die dafür hinreichende Bedingung (3.41.a) mit $\chi(g) = \chi(d^{-1}gd)$ bzw. mit ξ leicht nach. Ebenso sieht man leicht, daß die in (e) bzw. (f) angegebenen Versionen genau dann borelsch sind, wenn die Funktionen χ bzw. ξ borelsch sind. Die Den aus (d) sind trivialerweise irreduzibel, und das angegebene Irreduzibilitätskriterium für (e) bzw. (f) stimmt bei Berücksichtigung von (3.43.a) bzw. (3.43.b) genau mit dem aus (3.44) überein. Die gemachten Äquivalenzaussagen sind trivial. Damit kommen wir zur tierferliegenden Aussage (g). Sei U eine CISD von G mit unitärer Untergruppe G_0 , so gibt es zwei Möglichkeiten: 1. $\tilde{U}|_{G_0}$ ist irreduzibel. Dann ist $\tilde{U}|_{G_0}$ eine CUISD, die mit $\tilde{W} := \tilde{U}(d)$ offenbar χ) erfüllt und von der in (d) angegebenen Form ist. 2. $\tilde{U}|_{G_0}$ ist reduzibel. Seien H_1 ein echter, unter $\tilde{U}|_{G_0}$ invarianter Unterraum von H und U eine borelsche Version von U . Man zeigt leicht, daß

$H_2 := U(d)H_1$ unter $\tilde{U}|_{G_0}$ und $H_1 \cap H_2$ sowie $H_1 + H_2$ unter $\tilde{U}$ invariant sind. Da $\tilde{U}$ irreduzibel ist, folgt: $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, $H = H_1 + H_2$, so daß H die direkte, aber nicht notwendig orthogonale Summe von H_1 und H_2 ist. H_1 und H_2 enthalten keine weiteren echten unter $\tilde{U}|_{G_0}$ invarianten Unterräume mehr, denn ist $H'_1 \subset H_1$, $H'_1 \neq \{0\}$ invariant unter $\tilde{U}|_{G_0}$, so folgt wie oben $H = H'_1 + U(d)H'_1$, $H'_1 \cap U(d)H'_1 = \{0\}$, und aus $H'_1 \subset H_1$, $U(d)H'_1 \subset H_2$ folgt weiter: $H'_1 = H_1$. Damit haben wir für $\tilde{U}$ die Form aus (3.44); U_1, U_2, A, B seien definiert wie dort. Wegen der Irreduzibilität von $\tilde{U}$ sind H_1 und H_2 nach (3.44) orthogonal; damit folgt aus der Semiunitarität von $U(d): A^+ = A^{-1}, B^+ = B^{-1}$. Es ergibt sich dann: $\tilde{U}(g) = \tilde{U}(d)\tilde{U}(d^{-1}gd)\tilde{U}(d)^{-1} \Rightarrow \forall g \in G_0 (\exists \varphi(g) \in \mathbb{C}_1 (U_1(g) = \varphi(g)BU_2(d^{-1}gd)B^{-1}, U_2(g) = \varphi(g)AU_1(d^{-1}gd)A^{-1})),$ wobei φ offenbar borelsch ist, und $\tilde{U}(d)^2 = \tilde{U}(d^2) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}_1 (\lambda U_1(d^2) = BA, \lambda U_2(d^2) = AB)$. Aus beidem folgt: $\varphi(d^2)\lambda^2 = 1$, also $\lambda = \eta/\sqrt{\varphi(d^2)}, \eta \in \{1, -1\}$. Damit ist U von der Form:

$$\forall g \in G_0 (\tilde{U}(g) = \tilde{U} \begin{pmatrix} U_1(g) & 0 \\ 0 & \varphi(g)AU_1(d^{-1}gd)A^{-1} \end{pmatrix}, U(gd) = \tilde{U}(g) \begin{pmatrix} 0 & \lambda U_1(d^2)A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}).$$

Sei nun K eine komplexe Konjugation auf H_1 und $A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & KA^{-1} \end{pmatrix}$; A'

ist eine unitäre Abbildung von H in $H_1 \oplus H_1$ und die SD $g \mapsto A'\tilde{U}(g)A'^{-1}$ von G auf $H_1 \oplus H_1$ ist von der Form (f), denn φ erfüllt $\mathcal{E}$:

- (1) $U(g)U(g') = \omega(g, g')U(g, g') \Rightarrow \forall g \in G_0 (\varphi(g)\varphi(g')/\varphi(gg')) = \omega(g, g')\omega(d^{-1}gd, d^{-1}g'd) =$
- (2) $\tilde{U}(g)\tilde{U}(d) = \tilde{U}(d)\tilde{U}(d^{-1}gd) \Rightarrow \forall g \in G_0 (\varphi(g)/\varphi(d^{-1}gd) = \omega(g, d^2)/\omega(d^2, d^{-2}gd^2)).$

Für eine UISD $\tilde{U}$ erhält man durch analoge Schritte die Form (3.40. I.b); aus der Irreduzibilität folgt dann mit (3.44), daß (3.40. I.α) nicht erfüllt ist. Im hier betrachteten semiunitären Fall kann aber U_1 die entsprechende Bedingung γ) dennoch erfüllen. In diesem Fall wählen wir einen Repräsentanten W von $\tilde{W}$ aus γ) und setzen $W' := WK$. Aus γ) folgt, daß es eine borelsche Funktion $\mu: G_0 \rightarrow \mathbb{C}_1$ und $\forall \varphi \in \mathbb{C}_1$ gibt mit: $\forall g \in G_0 (U_1(g) = \mu(g)W'KU_1(d^{-1}gd)KW'^{-1}$ und $(W'K)^2 = \varphi U_1(d^2)$. Daraus folgt mit (1), (2):

$$\forall g, g' \in G_0 (\mu(g)\mu(g')/\mu(gg')) = \varphi(g)\varphi(g')/\varphi(gg')), \forall g \in G_0 (\mu(g)/\mu(d^{-1}gd) = \varphi(g)/\varphi(d^{-1}gd)), \varphi^2\mu(d^2) = 1. \text{ Damit ist } \chi: G_0 \rightarrow \mathbb{C}_1, \chi(g) := \varphi(g)/\mu(g),$$

ein Homomorphismus mit $\chi(g) = \chi(d^{-1}gd), \chi(d^2) = \varphi^2\varphi(d^2)$. Nun definieren

wir durch $A'' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\chi(d^2)}W' \end{pmatrix}$ einen unitären Operator auf $H_1 \oplus H_1$ und erhalten für die SD $g \mapsto A''A'U(g)A'^{-1}A''^{-1}$ genau die Form (e). ■

3.5. Konstruktion unitärer irreduzibler Multiplikatordarstellungen einer Gruppe aus denen ihrer Normalteiler von höchstens abzählbar-unendlichem Index.

Der durch (3.10), (3.40.II) gegebene Reduktionsprozess von CBDen auf CUSDen ist allein für unzusammenhängende Gruppen nicht trivial. Für solche Gruppen behandeln wir noch systematisch die Konstruktion der USDen aus denen ihrer Einskomponente, eine Aufgabe, die für die volle Poincaré-, Galilei- und die Sittergruppe wegen deren spezieller Struktur bereits durch (3.40.I) gelöst wird. Die Einskomponente einer topologischen Gruppe, d.h. diejenige Zusammenhangskomponente, die das Einselement enthält, ist ein abgeschlossener Normalteiler. Die Kardinalität der zugehörigen Quotientengruppe ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten; ist diese endlich, so ist die Einskomponente ein offener Normalteiler von endlichem Index.

Der Zusammenhang zwischen den SDen einer Gruppe und denen ihrer Normalteiler scheint kaum mehr direkt durchschaubar zu sein, wenn der Normalteiler von einem Index > 2 ist; dagegen wurde er für die UMDen mit beliebigem, aber festem Multiplikator von MACKEY in [22] umfassend untersucht. Wegen (3.21) genügt es auch völlig MDen zu betrachten; allerdings muß man dann die Multiplikatoren einer Gruppe kennen, um ihre SDen bestimmen zu können. Die beiden folgenden Sätze sind mit geringen Modifikationen Spezialfälle von Ergebnissen aus [22]. Für (3.45) und (3.46) benützen wir folgende

Konvention: Seien G eine Gruppe, S eine Untergruppe und ω ein Multiplikator von G . Dann schreiben wir
 Multiplikator von G für G -Multiplikator von G ,
 ω -Darstellung für unitäre ω -Darstellung,
 ω -Darstellung von S für $\omega|_S \times S$ -Darstellung von S .

(3.45) Satz: Seien G eine (lokal) kompakte Gruppe (mit abzählbarer Basis der Topologie), N ein (offener) Normalteiler von G mit $\text{card}(G/N) \leq \aleph_0$, ω ein (borelscher) Multiplikator von G , H ein (separabler) Hilbertraum und $U: N \rightarrow \mathcal{U}_+(H)$ eine (borelsche) irreduzible ω -D. Dann gilt:

(a) Für alle $g \in G$ ist

$$U^g: N \rightarrow \mathcal{U}_+(H), n \mapsto (\omega(gn, g^{-1}) / \omega(g^{-1}, gn)) U(gng^{-1})$$

eine (borelsche) irreduzible ω -D von N , und es gilt:
 $\forall g, g' \in G \quad (U^g g') = (U^{g'} g).$

(b) Seien S die folgende Untergruppe von G :

$$S := \{g \in G \mid U^g \text{ unitäräquivalent zu } U\}, \pi: S \rightarrow S/N \text{ die natürliche Ab-}$$

bildung, $\mathcal{G}: S/N \rightarrow S$ eine Abbildung mit $\pi \circ \mathcal{G} = \text{id}_{S/N}$, $\mathcal{G}(e_N) = e$ und $D := \mathcal{G}(S/N)$; für alle $d \in D$ sei $v(d) \in \mathcal{U}_+(H)$ so gewählt, daß gilt: $\forall n \in N$ ($U^d(n) = v(d)U(n)v(d)^{-1}$, $v(e) = 1_H$). Dann ist durch $\forall n \in N, d \in D$ ($v(nd) := U(n)v(d)/\omega(n, d)$) eine (borelsche) λ -D V von S definiert mit $V|_N = U$, für deren (borelschen) Multiplikator λ es einen Multiplikator τ von S/N so gibt, daß gilt:

$$\forall g, g' \in S \quad (\omega(g, g') = \lambda(g, g') \tau(\pi(g), \pi(g'))).$$

Beweis: (a) folgt aus [22; p. 277, Corollary]. (b) folgt aus dem Beweis von [22; p. 298, Theorem 8.2]; da dort die unserem V entsprechende Darstellung auf eine komplizierte Weise konstruiert wird, skizzieren wir den Beweis trotzdem. Aus der Definition von V folgt sofort:

$\forall g \in S, n \in N$ ($U^g(n) = v(g)v(n)v(g)^{-1}$, $U(n) = v(n)$) und damit $\forall g, g' \in S, n \in N$ ($v(gg')U(n)v(gg')^{-1} = U^g g'(n) = (U^g g')(n) = v(g)v(g')U(n)v(g')^{-1}v(g)^{-1}$) und weiter, da U irreduzibel ist, $\forall g, g' \in S$ ($v(g)v(g')v(gg')^{-1} = \lambda(g, g') 1_H$, $\lambda(g, g') \in \mathbb{C}_1$); somit ist V eine λ -D von S , die leicht ersichtlich borelsch ist. Aus $U(gng^{-1}) = v(gng^{-1}) = \lambda(g, g^{-1})/\lambda(gn, g^{-1})\lambda(g, n)v(g)v(n)v(g)^{-1} = \lambda(g, g^{-1})/\lambda(gn, g^{-1})\lambda(g, n)U^g(n) = \lambda(g, g^{-1})\omega(gn, g^{-1})\omega(g, n)/\omega(g, g^{-1})\lambda(gn, g^{-1})\lambda(g, n)U(gng^{-1})$ folgt für den Multiplikator $\psi := \omega/\lambda$:

(1) $\forall g \in S, n \in N$ ($\psi(gn, g^{-1})\psi(g, n)/\psi(g, g^{-1}) = 1$). Um den Multiplikator zu studieren, definieren wir eine spezielle ψ -Darstellung: Auf dem Hilbertraum der Funktionen von S/N in $\mathbb{C}$ ist für jedes $g \in S$ durch $(w(g)f)(\pi(d)) = (\psi(d^{-1}g, \mathcal{G} \circ \pi(g^{-1}d))\psi(d^{-1}, g)/\psi(d, d^{-1}))f(\pi(g^{-1}d))$ eine lineare Abbildung $W(g)$ definiert, für die gilt:

(2) $\forall g, g' \in S$ ($W(g)W(g') = \psi(g, g')W(gg')$). Wegen (1) ist $W(n)$ für alle $n \in N$ die Identität, so daß $\forall d \in D, n \in N$ ($W(nd) = (\psi(n, d))^{-1}W(d)$). Nun gilt: $V(n)v(d) = \lambda(n, d)v(nd) = \lambda(n, d)/\omega(n, d)U(n)v(d)$, also:

$\forall n \in N, d \in D$ ($\psi(n, d) = 1$), und somit $\forall n \in N, d \in D$ ($W(nd) = W(d)$). Damit folgt aus (2), daß ψ auf den Äquivalenzklassen bzgl. N konstant und somit von der Form $\psi(g, g') = \tau(\pi(g), \pi(g'))$ ist, wobei τ ein Multiplikator auf S/N ist.

(3.46) Satz: [22; p. 302, Theorem 8.4]: Seien $G, N, \omega, H, U, S, V, \pi, \tau$ wie in (3.45) und seien für jede Nebenklasse $gS \in G/S$ ein Repräsentant $\underline{gS}$ gewählt mit $\underline{eS} = e$. Dann gilt:

(a) Für jede irreduzible τ -D $W: S/N \rightarrow \mathcal{U}_+(H')$ auf einem (separablen) Hilbertraum H' ist auf dem Hilbertraum der Abbildungen von G/S in $H \otimes H'$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g \rangle = \sum_{i \in G/S} \langle f(i)|g(i) \rangle_{H \otimes H'}$ eine borelsche irreduzible ω -D U' von G gegeben durch

$$(U'(g)f)(g'S) := (\omega(g'S^{-1}g, g'^{-1}g'S)\omega(g'S^{-1}, g)/\omega(g'S, g'S^{-1})) \\ v(g'S^{-1}gg'^{-1}g'S) \otimes ((g'S^{-1}gg'^{-1}g'S))f(g'^{-1}g'S).$$

- (b) Für jede (borelsche) irreduzible ω -D U'' von G , die - auf N eingeschränkt - U als Unterdarstellung enthält, gibt es ein W wie in (a) derart, daß U'' unitäräquivalent ist zu U' aus (a).

Somit haben wir ein Verfahren, alle irreduziblen ω -Den von G zu konstruieren, die auf N eingeschränkt eine vorgegebene irreduzible ω -D von N als Unterdarstellung enthalten, Damit erhielte man alle irreduziblen ω -Den von G , wenn jede dieser Darstellungen auf N eingeschränkt überhaupt eine irreduzible Unterdarstellung enthielte. Letzteres ist zwar für einen Normalteiler von endlichem Index höchst plausibel, ein allgemeiner Beweis ist uns aber nicht gelungen.

4. Die stetigen irreduziblen Strahldarstellungen der vollen Poincarégruppe.

Es werden die wohlbekannten stetigen irreduziblen Strahldarstellungen der zusammenhängenden Poincarégruppe $\mathcal{P}_0$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum zusammengestellt und aus ihnen nach der Methode aus 3.4. diejenigen der vollen Poincarégruppe $\mathcal{P}$ konstruiert. Weiter wird eine Bedingung dafür abgeleitet, daß sich eine beliebige stetige Strahldarstellung von $\mathcal{P}_0$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum zu einer stetigen Bündeldarstellung von $\mathcal{P}$ fortsetzen läßt.

4.1. Die Struktur der vollen Poincarégruppe.

Wir identifizieren den Minkowskiraum mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^{4+}$ und numerieren die Komponenten seiner Punkte durch obere Indizes: $\mathbb{R}^{4+} \ni x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Komponenten mit unteren Indizes sind definiert durch $(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$. Über griechische Indizes, die auf verschiedenem Niveau stehen, soll stets von 0 bis 3 summiert werden. Das Minkowskische Skalarprodukt ist erklärt durch:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{4+} \quad (xy := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 := x^\nu y_\nu).$$

Die volle Poincarégruppe $\mathcal{P}$ kann sehr einfach - wenngleich nicht auf die physikalisch plausibelste Weise - eingeführt werden als die Gruppe der Bijektionen p von $\mathbb{R}^{4+}$, für die gilt:

+) Die physikalische Raumzeit trägt keine vom Bezugssystem unabhängige lineare Struktur; deshalb wäre es konsequenter sie bereits in der speziellen Relativitätstheorie als differenzierbare Mannigfaltigkeit aufzufassen.

$$\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}^4 \quad ((p(x) - p(x'))(p(y) - p(y')) = (x - x')(y - y')).$$

Zu jedem solchen p gibt es $a \in \mathbb{R}^4$, L aus der zusammenhängenden Lorentzgruppe $\mathcal{L}_0$ - aufgefaßt als Matrixgruppe - und I aus der Gruppe $\tilde{J} := \{I_0, I_s, I_t, I_{st}\}$ reeller 4×4 -Matrizen mit $I_0 :=$ Einheitsmatrix, $I_s :=$ Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $1, -1, -1, -1$, $I_t := -I_s$, $I_{st} := -I_0$ derart, daß gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (p(x) = a + L I x =: (a, L, I)x).$$

Da die Multiplikation in $\mathcal{P}$ als Komposition von Abbildungen erklärt ist, ergibt sich leicht:

$$(4.1) \quad (a, L, I)(a', L', I') = (a + L I a', L I L' I, I I'), (a, L, I)^{-1} = (-I L^{-1} a, I L^{-1} I, I), (a, L, I) = (a, 1, I_0)(o, L, I_0)(o, 1, I).$$

Die Abbildung $i: \mathcal{P} \longrightarrow GL(5, \mathbb{R}), (a, L, I) \mapsto \begin{pmatrix} L I & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ein injektiver Homomorphismus und $i(\mathcal{P})$ ist eine pseudoalgebraische Untergruppe von $GL(5, \mathbb{C})$, somit ist $i(\mathcal{P})$ in der natürlichen Topologie von $GL(5, \mathbb{C})$ abgeschlossen (s. [13; p. 344]) und damit eine topologische Lie-Untergruppe von $GL(5, \mathbb{C})$ (s. [13; p. 105, Theorem 2.3]). Die natürliche Übertragung der Topologie und der analytischen Struktur von $i(\mathcal{P})$ auf $\mathcal{P}$ macht $\mathcal{P}$ zu einer Liegruppe; diese besteht aus 4 Zusammenhangskomponenten $\mathcal{P}_i := \{(a, L, I_i) \mid a \in \mathbb{R}^4, L \in \mathcal{L}_0\}$, $i \in \{0, s, t, st\}$, und ist somit insbesondere eine lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie. Die einzigen offenen Untergruppen von $\mathcal{P}$ sind $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_P := \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_s, \mathcal{P}_T := \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_t, \mathcal{P}_{PT} := \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_{st}$; sie sind alle auch Normalteiler. Einige abgeschlossenen Untergruppen von $\mathcal{P}$ sind: $\{(o, L, I) \mid L \in \mathcal{L}_0, I \in \tilde{J}\}, \{(o, L, I_0) \mid L \in \mathcal{L}_0\}, \{(o, 1, I) \mid I \in \tilde{J}\}$ und $\{(a, 1, I_0) \mid a \in \mathbb{R}^4\}$; davon ist die letzte ein Normalteiler.

In Hinblick auf 4.3. sind die Multiplikatoren von $\mathcal{P}$ von Bedeutung. Diese können zwar vollständig angegeben werden, sind aber zum Teil unstetig und schwer zu handhaben. Als technischen Kunstgriff führen wir eine Hilfsgruppe ein, deren Multiplikatoren stetig sind und aus deren BDen bzw. SDen sich diejenigen von $\mathcal{P}$ durch eine triviale Prozedur gewinnen lassen, die allgemein der folgende Satz angibt.

(4.2) Satz: Seien G' und G topologische Gruppen derart, daß es einen surjektiven, stetigen und offenen Homomorphismus $h: G' \longrightarrow G$ gibt. Weiter seien $q: G \longrightarrow G'$ eine Abbildung mit $hoq = id_G, q(e_G) = e_{G'}$, und S eine Gruppe sowie ein topologischer Raum⁺⁾ . Dann gilt:

⁺⁾ Dabei denken wir an die Gruppe $\mathcal{U}(H, \mathcal{P}_T)$.

- (a) Für jeden stetigen Homomorphismus $V: G \rightarrow S$ ist durch $V' := V \circ h$ ein stetiger Homomorphismus von G' in S definiert, mit $V'(\text{Kern}(h)) = e_S$.
- (b) Umgekehrt ist für jeden stetigen Homomorphismus $V': G' \rightarrow S$ mit $V'(\text{Kern}(h)) = e_S$ durch $V := V' \circ q$ ein stetiger Homomorphismus von G in S definiert, mit $V' = V \circ h$.

Beweis: (a) ist trivial. (b) Der algebraische Teil ist einfach; deshalb beweisen wir nur die Stetigkeit von V . Sei $O \subset S$ offen. Dann folgt aus $V'^{-1}(O) = h^{-1}(V^{-1}(O))$ mit der Surjektivität von h $h(V'^{-1}(O)) = V^{-1}(O)$. Da V' stetig und h offen sind ist $V^{-1}(O)$ offen. ■

Die Voraussetzungen von (4.2) liegen insbesondere vor, wenn G' eine Überlagerungsgruppe von G bzgl. h ist.

(4.3) Def: Die Gruppe $\tilde{\mathcal{P}}$ sei die Menge $\mathbb{R}^4 \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{I}$ mit dem Multiplikationsgesetz:

$$(a, A, I)(a', A', I') := (a + \wedge(A)Ia', A\Phi_I(A'), II'),$$

$$(o, 1, I_o) \equiv \text{Einselement}, (a, A, I)^{-1} = (-I \wedge(A^{-1})a, \Phi_I(A^{-1}), I).$$

Dabei ist $\wedge$ der Homomorphismus von $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ in $\mathcal{L}_o$, der definiert ist durch:

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (\wedge(A)x := Ax A^+ \text{ mit } x := \zeta, x^\nu)$$

oder gleichbedeutend:

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (\wedge(A^{-1})x := A^+ \tilde{x} A \text{ mit } \tilde{x} := \underbrace{I_s}_{\text{S}} x)$$

mit:

$$\zeta_o := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \zeta_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \zeta_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \zeta_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und Φ ist der Homomorphismus von $\mathcal{I}$ in die Automorphismengruppe von $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, der definiert ist durch:

$$\forall A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}), I \in \mathcal{I} \quad (\Phi_I(A) = \begin{cases} A & \text{für } I \in \{I_o, I_{st}\} \\ (A^+)^{-1} & \text{für } I \in \{I_s, I_t\} \end{cases}).$$

Die in (4.3) ausgesprochenen Behauptungen sind leicht zu beweisen; zur Abkürzung setzen wir:

$$(a, A) := (a, A, I_o), I := (o, 1, I), (A, I) := (o, A, I), A := (A, I_o).$$

- (4.4) Satz: Sei $\tilde{\mathcal{P}}$ mit der Produkttopologie von $\mathbb{R}^4 \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{I}$ versehen, wobei $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ und $\mathcal{I}$ die natürliche Topologie von Matrixgruppen tragen. Dann ist $\tilde{\mathcal{P}}$ eine topologische Gruppe; sie besteht aus den vier Zusammenhangskomponenten $\tilde{\mathcal{P}}_i := \{(a, A, I_i) \mid a \in \mathbb{R}^4, A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\}$ mit $i \in \{o, s, t, st\}$, von denen jede einfach zusammenhängend ist, und besitzt als einzige offene Untergruppen $\tilde{\mathcal{P}}_o, \tilde{\mathcal{P}}_p := \tilde{\mathcal{P}}_o \cup \tilde{\mathcal{P}}_s, \tilde{\mathcal{P}}_t := \tilde{\mathcal{P}}_o \cup \tilde{\mathcal{P}}_t, \tilde{\mathcal{P}}_{pt} := \tilde{\mathcal{P}}_o \cup \tilde{\mathcal{P}}_{st}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$. Die Abbildung $h: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}, (a, A, I) \mapsto (a, \wedge(A), I)$ ist ein surjektiver, stetiger und offener Homomorphismus mit $\text{Kern}(h) = \{(o, 1, I_o), (o, -1, I_o)\}$.

Beweis: Der Nachweis der topologischen Aussagen ist zwar nicht trivial, wird aber wegen seiner technischen Natur übergangen. Daß h ein Homomorphismus ist, folgt leicht mit $\forall A \in \mathcal{S}(2, \mathbb{C}), I \in \mathcal{I}(\wedge(\Phi_I(A))) = \wedge I(A)I$.

Ändert man das Multiplikationsgesetz in (4.3) ab zu $(a, A, I)(a', A', I') := (a \wedge I(A)Ia', \varepsilon(I, I')A \Phi_I(A'), II')$, mit einer geeigneten Funktion $\varepsilon: \mathcal{I} \times \mathcal{I} \longrightarrow \{1, -1\}$, so kann man insgesamt 8 paarweise nichtisomorphe Gruppen definieren, für die (4.4) gilt (s. [34; p. 172]). Nach (4.2) genügt es aber, um alle Darstellungen von $\mathcal{P}$ zu finden, diejenigen einer dieser Gruppen zu kennen; wir haben in (4.3) die einfachste ausgewählt.

Wir kommen nun zu den Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}$. Wegen (4.16) benötigen wir die $\tilde{\mathcal{P}}_P$ -Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}$.

(4.5) Satz: [34; p. 189-192]) Die Menge der $\tilde{\mathcal{P}}_P$ -Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}$ ist bis auf triviale Äquivalenz gegeben durch die folgenden stetigen und paarweise inäquivalenten Multiplikatoren

$$\omega_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \{1, -1\};$$

$$\omega_{\alpha\beta}((a, A, I), (a', A', I')) := \omega'_{\alpha\beta}(I, I') \text{ mit}$$

$$\omega'_{\alpha\beta}(I_t, I_s) = \omega'_{\alpha\beta}(I_{st}, I_s) := \alpha\beta,$$

$$\omega'_{\alpha\beta}(I_t, I_t) = \omega'_{\alpha\beta}(I_{st}, I_t) := \alpha,$$

$$\omega'_{\alpha\beta}(I_t, I_{st}) = \omega'_{\alpha\beta}(I_{st}, I_{st}) := \beta, \quad \omega'_{\alpha\beta}(I, I') := 1 \text{ sonst.}$$

Alle Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ sind trivialäquivalent zu $\omega \equiv 1$.

Beim Beweis von (4.5) benützt man eine wohlbekannte Eigenschaft von $\mathcal{P}_0$, die auch für das weitere von Bedeutung ist:

(4.6) Satz: Jeder Homomorphismus von $\mathcal{P}_0$ (und damit wegen (4.2) auch von $\tilde{\mathcal{P}}_0$) in $\mathbb{C}_1$ ist trivial.

4.2. Die stetigen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}_0$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum

Die unitären irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}_0$ sind heute wohlbekannt. Wir stellen sie hier als Grundlage für die folgenden Untersuchungen nochmals zusammen, beschränken uns dabei allerdings auf diejenigen Darstellungen, die ein im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel liegendes Energie-Impuls-Spektrum liefern. Damit ist folgendes gemeint: Jede CSD $\tilde{U}$ von $\mathcal{P}_0$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}_0$ hat genau eine Version U , die auf die Translationsgruppe eingeschränkt eine CUED ist. Daher gibt es ein Spektralmaß P auf $\mathbb{R}^4$ mit $\forall a \in \mathbb{R}^4 \quad (U(a, 1) = \int e^{i p a} P(dp))$. Der Träger von P heißt das Energie-Impuls-Spektrum von $\tilde{U}$. Dasselbe

Energie-Impuls-Spektrum wird per definitionem jeder Version von $\tilde{U}$ und auch jeder Fortsetzung von $\tilde{U}$ auf eine größere Gruppe z.B. $\tilde{\mathcal{P}}$ zu-
gesprochen.

(4.7) Def: Unter einer physikalischen Strahldarstellung (PSD) von $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{P}}_1, i \in \{0, P, T, PT\}$ verstehen wir eine CSD, deren Energie-Impuls-Spektrum eine Teilmenge von $\{p \in \mathbb{R}^4 \mid p^0 > 0, pp \geq 0\}$ ist.

Für jede CSD von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ bzw. $\mathcal{P}_0$ gibt es $\mu \in \mathbb{R}_+$ derart, daß das Energie-Impuls-Spektrum mit einer der folgenden Mengen übereinstimmt.

$$\begin{aligned} (4.8) \quad 0_\mu &:= \{p \in \mathbb{R}^4 \mid p^0 > 0, pp = \mu^2\}, \\ 0_{\bar{\mu}} &:= \{p \in \mathbb{R}^4 \mid p^0 < 0, pp = -\mu^2\}, \\ 0_{i\mu} &:= \{p \in \mathbb{R}^4 \mid pp = -\mu^2\}, \mu \neq 0, \\ 0 &:= \{0\} \subset \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Bei einer PISD tritt allein 0_μ als Energie-Impuls-Spektrum auf. Das Massenhypersphäroid 0_μ fassen wir stets als Maßraum auf mit dem Lorentz-invarianten Maß $\mu_\mu(B) := \int_B d^3p (\mu^2 + \vec{p}^2)^{-1/2}$, $B' := \{(p^0, \vec{p}) \mid \vec{p} \in B, p^0 = (\mu^2 + \vec{p}^2)^{1/2}\}$ für alle Lebesgue-meßbaren Mengen $B \subset \mathbb{R}^3$.

(4.9) Die kleine Gruppe $SU(2)$:

Für alle $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ seinen $k_m := (m, \vec{0}) \in 0_m$ und $A_m: 0_m \longrightarrow SL(2, \mathbb{C})$,

$A_m(p) := (m \vec{0}_0 + p) / (2m(m + p^0))^{1/2}$. Dann gilt:

$$\forall A \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (\wedge (A)k_m = k_m \iff A \in SU(2)),$$

$$\forall p \in 0_m \quad (\wedge (A_m(p))k_m = p),$$

$$\forall A \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (A_m(p))^{-1} A A_m(\wedge(A^{-1})p) =: {}^m A^p \in SU(2)).$$

(4.10) Die kleine Gruppe $E(2)$:

Seien $k_0 := (1/2, 0, 0, 1/2) \in 0_0, A_0: 0_0 \longrightarrow SL(2, \mathbb{C}), A_0(p) :=$

$$= (p^0 + p^3)^{-1/2} \begin{pmatrix} p^0 + p^3 & 0 \\ p^1 + ip^2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ und } E(2) \text{ die Gruppe der } A \in SL(2, \mathbb{C}) \text{ mit}$$

$|A_{11}| = 1, A_{21} = 0$. Dann gilt:

$$\forall A \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (\wedge (A)k_0 = k_0 \iff A \in E(2)),$$

$$\forall p \in 0_0 \quad (\wedge (A_0(p))k_0 = p),$$

$$\forall A \in SL(2, \mathbb{C}) \quad ((A_0(p))^{-1} A A_0(\wedge(A^{-1})p) =: {}^A p \in E(2)).$$

(4.11) Jede CUIED von $SU(2)$ ist unitäräquivalent zu einer der paarweise unitär inäquivalenten CUIEDen $D^{(j)}$, $j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$, die wie folgt definiert sind. Für $j \in \{1/2, 1, \dots\}$ sei $n := 2j$ und V_j der

$2j+1$ -dimensionale Hilbertraum der symmetrischen⁺ Funktionen
 $\xi: \{1,2\}^n \rightarrow \mathbb{C}, (i_1, \dots, i_n) \rightarrow \xi_{i_1, \dots, i_n}$, mit dem Skalarprodukt

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^2 \xi_{i_1, \dots, i_n}^* \eta_{i_1, \dots, i_n}. \text{ Dann ist}$$

$$(1) \mathcal{D}^{(j)}: \text{SU}(2) \rightarrow \mathcal{U}_+(V_j),$$

$$\mathcal{D}^{(j)}(A) \xi_{i_1, \dots, i_n} := \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^2 A_{i_1 k_1} \dots A_{i_n k_n} \xi_{k_1, \dots, k_n},$$

eine CUIED und es gilt mit $\Gamma := i\sigma_2$:

$$(2) \forall A \in \text{SU}(2) \quad (\mathcal{D}^{(j)}(A^*) = \mathcal{D}^{(j)}(\Gamma) \mathcal{D}^{(j)}(A) \mathcal{D}^{(j)}(\Gamma)^{-1}).$$

Die Abbildung $\tilde{A}: V_j \rightarrow \mathbb{C}^{2j+1}, (\tilde{A}\xi)_k := \binom{n}{k-1}^{1/2} \underbrace{\xi_{1, \dots, 1, 2, \dots, 2}}_{k-1 \text{ mal}}$

ist unitär und wir setzen:

$$(3) \mathcal{D}^{(j)}: \text{SU}(2) \rightarrow \mathcal{U}_+(\mathbb{C}^{2j+1}), A \mapsto \tilde{A}^{(j)}(A) \tilde{A}^{-1}.$$

Für $j=0$ sei $\mathcal{D}^{(0)} = \mathcal{D}^{(0)}: \text{SU}(2) \rightarrow \mathcal{U}_+(\mathbb{C}), \mathcal{D}^{(0)}(A) := 1$

Für jede komplexe 2×2 -Matrix A kann man analog zu (4.11.1) durch

$$(\mathcal{D}^{(j)}(A) \xi)_{i_1, \dots, i_n} := \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^2 A_{i_1 k_1} \dots A_{i_n k_n} \xi_{k_1, \dots, k_n} \text{ eine lineare Abbil-}$$

dung $\mathcal{D}^{(j)}(A)$ von V_j und durch $\mathcal{D}^{(j)}(A) := \tilde{A} \mathcal{D}^{(j)}(A) \tilde{A}^{-1}$ eine solche von $\mathbb{C}^{2j+1}$ definieren. Dann gilt für alle komplexen 2×2 -Matrizen A und A' :

$$(4.12) (a) \mathcal{D}^{(j)}(A) \mathcal{D}^{(j)}(A') = \mathcal{D}^{(j)}(AA'),$$

$$(b) \mathcal{D}^{(j)}(A)_{kl} = \left(\binom{n}{k-1} \binom{n}{l-1} \right)^{1/2} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^2 A_{1i_1} \dots A_{1i_{k-1}} A_{2i_k} \dots A_{2i_n},$$

wobei die Summe genau über diejenigen n -tupel $(i_1, \dots, i_n)$ läuft, in denen genau $l-1$ Einsen vorkommen,

$$(c) \mathcal{D}^{(j)}(A^*) = \mathcal{D}^{(j)}(A), \mathcal{D}^{(j)}(A^+) = \mathcal{D}^{(j)}(A)^+, \mathcal{D}^{(j)}(\alpha A) = \alpha \mathcal{D}^{(j)}(A), \alpha \in \mathbb{C},$$

$$(d) (\mathcal{D}^{(j)}(A))_{11} = (A_{22})^{2j}, \mathcal{D}^{(j)}(A)_{2j+1, 2j+1} = (A_{11})^{2j}.$$

Für jede komplexe 2×2 -Matrix A und jedes $j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$ setzen wir $\mathcal{D}^{(j)}(\Gamma A^* \Gamma^{-1}) =: \mathcal{D}^{(-j)}(A)$. Dann sind $\mathcal{D}^{(j)}$ und $\mathcal{D}^{(-j)}$ eingeschränkt auf

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ CIEDen, die wegen $\forall A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (\mathcal{D}^{(-j)}(A) = \mathcal{D}^{(j)}((A^+)^{-1}))$

⁺) D.h. $\xi_{i_1, \dots, i_n} = \xi_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$ für alle Permutationen σ von $\{1, \dots, n\}$.

eingeschränkt auf $SU(2)$ übereinstimmen.

(4.13) Jede CUIED von $E(2)$ ist unitäräquivalent zu einer der paarweise unitär inäquivalenten CUIEDen $D_o^{(s)}$, $s \in \{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}$, $D_c^{(r)}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die wie folgt definiert sind:

$$(1) D_o^{(s)}: E(2) \rightarrow \mathcal{U}_+(\mathbb{C}), D_o^{(s)}(A) := (A_{22})^{2s} 1_{\mathbb{C}},$$

$$(2) D_c^{(r)}: E(2) \rightarrow \mathcal{U}_+(L_2(\mathbb{C}_1)),$$

$$(D_c^{(r)}(A)f)_\omega := e^{ir \operatorname{Re}(A_{11} A_{12}^* \omega^*)} (A_{11})^\varepsilon f_{(A_{11})^{-2} \omega}, \varepsilon := (1-r/|r|)/2.$$

Mit $K \in \mathcal{U}_-(\mathbb{C})$, $Kz := z^*$, und $K_c \in \mathcal{U}_-(L_2(\mathbb{C}_1))$, $(K_c f)_\omega := (f_{-\omega})^*$, gilt:

$$(3) KD_o^{(s)}(A)K = D_o^{(s)}(A^*), K_c D_c^{(r)}(A)K_c = D_c^{(r)}(A^*).$$

Wir geben nun die PISDen von $\tilde{\mathcal{P}}_o$ an; die von $\mathcal{P}_o$ ergeben sich dann nach (4.2) und (4.4) durch einen trivialen Prozess.

(4.14) Satz: Die im folgenden definierten Abbildungen sind CUIEDen von $\tilde{\mathcal{P}}_o$. Die durch diese EDen definierte Menge von CISDen besteht genau aus je einem Repräsentanten jeder Unitär-Äquivalenzklasse von PISDen von $\tilde{\mathcal{P}}_o$.

$$m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}:$$

$$U_{m,j}: \tilde{\mathcal{P}}_o \rightarrow \mathcal{U}_+(H_{m,j}), H_{m,j} := \int_0^{\mu_m(dp)} \mathbb{C}^{2j+1}$$

$$(U_{m,j}(a, A)\psi)_\alpha(p) := e^{ipa} \sum_{\beta=1}^{2j+1} D_{\alpha\beta}^{(j)}(A^p) \psi_\beta(\wedge(A^{-1})p).$$

$$s \in \{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}: U_{o,s}: \tilde{\mathcal{P}}_o \rightarrow \mathcal{U}_+(H_o), H_o := \int_0^{\mu_o(dp)} \mathbb{C}$$

$$(U_{o,s}(a, A)\psi)(p) := e^{ipa} D_o^{(s)}(A^p) \psi(\wedge(A^{-1})p) =$$

$$= e^{ipa} (A_{22}^p)^{2s} \psi(\wedge(A^{-1})p), A_{22}^p = \frac{(p^0 + p^3)A_{22}^* - (p^1 - ip^2)A_{12}^*}{|(p^0 + p^3)A_{22}^* - (p^1 - ip^2)A_{12}^*|}.$$

$$r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: U_{c,r}: \tilde{\mathcal{P}}_o \rightarrow \mathcal{U}_+(H_c), H_c := \int_0^{\mu_o(dp)} L_2(\mathbb{C}_1),$$

$$(U_{c,r}(a, A)\psi)(p) := e^{ipa} (D_c^{(r)}(A^p) \psi(\wedge(A^{-1})p))_\omega =$$

$$= e^{ipa + ir \operatorname{Re}(A_{11}^p A_{12}^p \omega^*)} (A_{11}^p)^\varepsilon \psi(\wedge(A^{-1})p) (A_{11}^p)^{-2} \omega, \varepsilon := (1-r/|r|)/2.$$

Alle PSDen von $\tilde{\mathcal{P}}_o$ kann man aus den IPSDen aufbauen. Da $\tilde{\mathcal{P}}_o$ vom v. Neumann-Murray-Typ I ist, liefert die Zerlegungstheorie (vgl. z.B. [26.a]) folgendes interessante Ergebnis (vgl. z.B. [34; p.188]).

(4.15) Satz: Sei $\tilde{U}$ eine PSD von $\tilde{\mathcal{P}}_o$. Dann gibt es Maße $\mathcal{S}_c$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{S}$ auf $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und Funktionen N_o bzw. N_c bzw. N von $\{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}$

bzw. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \{0, 1/2, 1, \dots\}$ in $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ derart, daß $\tilde{U}$ unitäräquivalent ist zu der SD, die durch folgende PED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ erzeugt wird.

$$U' := \left(\bigoplus_{s=0, \pm 1/2, \pm 1, \dots} N_0(s) U_{0,s} \right) \oplus \left(\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} d\mathbf{r} N_c(\mathbf{r}) U_{c,r} \right) \oplus \left(\int (\mathcal{G}(\mathbf{d}\mathbf{m})) \left(\bigoplus_{j=0, 1/2, 1, \dots} N(\mathbf{m}, j) U_{\mathbf{m}, j} \right) \right).$$

$$\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \quad j=0, 1/2, 1, \dots$$

4.3. Die stetigen irreduziblen Strahldarstellungen von $\mathcal{P}$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum.

Wegen (4.4) genügt es die PISden von $\tilde{\mathcal{P}}$ aufzusuchen; diejenigen von $\mathcal{P}$ erhält man dann durch die triviale, in (4.2) angegebene Prozedur.

Da die Gruppe $\tilde{\mathcal{P}}$ nicht zusammenhängend ist, sind ihre SDen nicht notwendig unitär. Die möglichen unitären Untergruppen sind nach (3.16) und (4.4) $\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{P}}_P, \tilde{\mathcal{P}}_T$ und $\tilde{\mathcal{P}}_{PT}$. Es gilt aber:

(4.16) Satz: ([34; p. 191]): Sei $\tilde{U}$ eine PSD von $\tilde{\mathcal{P}}$. Dann ist $\tilde{\mathcal{P}}_P$ die unitäre Untergruppe von $\tilde{\mathcal{P}}$ bzgl. $\tilde{U}$.

Zur Anwendung von (3.40) benötigen wir einige Eigenschaften der PISden von $\tilde{\mathcal{P}}_0$, die wir nun zusammenstellen.

(4.17) Satz: Für alle $\mathbf{m} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}, s \in \{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}, \mathbf{r} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seien definiert:

$$P_{\mathbf{m}, j} \in \mathcal{U}_+(H_{\mathbf{m}, j}), (P_{\mathbf{m}, j} \psi)(p) := J_j D^{(j)}(L_{\mathbf{m}}(p)) \psi(I_S p),$$

$$T_{\mathbf{m}, j} \in \mathcal{U}_-(H_{\mathbf{m}, j}), (T_{\mathbf{m}, j} \psi)(p) := K_j D^{(j)}(L_{\mathbf{m}}(p)) \psi(I_S p),$$

$$J_j \in \mathcal{U}_+(\mathbb{C}^{2j+1}), J_j := D^{(j)}(-\Gamma), K_j \in \mathcal{U}_-(\mathbb{C}^{2j+1}), (K_j x)_\alpha := x_\alpha^*;$$

$$P_{0,s} \in \mathcal{U}_+(H_0), (P_{0,s} \psi)(p) := J_0 D_0^{(s)}(L_0(p)) \psi(I_S p),$$

$$T_{0,s} \in \mathcal{U}_-(H_0), (T_{0,s} \psi)(p) := K_0 D_0^{(s)}(L_0(p)) \psi(I_S p),$$

$$J_0 \in \mathcal{U}_+(\mathbb{C}), J_0 := \text{id}_{\mathbb{C}}, K_0 \in \mathcal{U}_-(\mathbb{C}), K_0 z := z^*;$$

$$P_{c,r} \in \mathcal{U}_+(H_c), (P_{c,r} \psi)(p) := J_c^{(r)} D_c^{(r)}(L_c(p)) \psi(I_S p),$$

$$T_{c,r} \in \mathcal{U}_-(H_c), (T_{c,r} \psi)(p) := K_c D_c^{(r)}(L_c(p)) \psi(I_S p);$$

$$J_c^{(r)} \in \mathcal{U}_+(L_2(\mathbb{C}_1)), (J_c^{(r)} f)_\omega := (i\omega)^{\mathcal{E}} f_{\omega^*}, \mathcal{E} := (1-r/|r|)/2;$$

$$K_c \in \mathcal{U}_-(L_2(\mathbb{C}_1)), (K_c f)_\omega := (f_{-\omega^*})^*.$$

dabei ist $\forall \mu \in \{0, m\}, p \in O_\mu (L_\mu(p) := \Gamma A_\mu(p) + A_\mu(I_S p))$ d.h. $L_m(p) =$

$$= \Gamma, L_o(p) = -|p^1 + ip^2|^{-1} \begin{pmatrix} p^1 + ip^2 & -1 \\ 0 & p^1 - ip^2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für alle $(a, A) \in \widetilde{\mathcal{P}}_o$:

$$U_{m,j}(a, A) = P_{m,j} U_{m,j}(I_s a, (A^+)^{-1}) P_{m,j}^{-1},$$

$$U_{m,j}(a, A) = T_{m,j} U_{m,j}(I_t a, (A^+)^{-1}) T_{m,j}^{-1},$$

$$P_{m,j}^2 = 1, T_{m,j}^2 = (-1)^{2j}, P_{m,j} T_{m,j} = T_{m,j} P_{m,j};$$

$$U_{o,-s}(a, A) = P_{o,s} U_{o,s}(I_s a, (A^+)^{-1}) P_{o,s}^{-1},$$

$$U_{o,s}(a, A) = T_{o,s} U_{o,s}(I_t a, (A^+)^{-1}) T_{o,s}^{-1},$$

$$P_{o,s} P_{o,-s} = (-1)^{2s}, T_{o,s}^2 = (-1)^{2s}, T_{o,-s} P_{o,s} = P_{o,s} T_{o,s};$$

$$U_{c,r}(a, A) = P_{c,r} U_{c,r}(I_s a, (A^+)^{-1}) P_{c,r}^{-1},$$

$$U_{c,r}(a, A) = T_{c,r} U_{c,r}(I_t a, (A^+)^{-1}) T_{c,r}^{-1},$$

$$P_{c,r}^2 = 1, T_{c,r}^2 = \text{sign}(r), P_{c,r} T_{c,r} = T_{c,r} P_{c,r}.$$

Beweis: Die Behauptungen sind mit folgenden Aussagen leicht nachzurechnen:

$$\forall p \in O_m(L_m(p) \in SU(2)), \forall p \in O_o(L_o(p) \in E(2)), \forall (a, A) \in \widetilde{\mathcal{P}}_o, \mu \in \{o, m\},$$

$$p \in O_\mu(L_\mu(p) A_\mu(I_s p)^{-1} (A^+)^{-1} A_\mu(I_s \wedge (A^{-1}) p) L_\mu(\wedge (A^{-1}) p)^{-1} =$$

$$= (A_\mu(p)^{-1} A A_\mu(\wedge (A^{-1}) p))^*, \forall A \in SU(2) (J_j D^{(j)}(A) J_j^{-1} = D^{(j)}(A^*),$$

$$K_j D^{(j)}(A) K_j^{-1} = D^{(j)}(A^*), \forall A \in E(2) (J_o D_o^{(s)}(A) J_o^{-1} = D_o^{(-s)}(A^*),$$

$$K_o D_o^{(s)}(A) K_o^{-1} = D_o^{(s)}(A^*), J_c^{(r)} D_c^{(r)}(A) J_c^{(r)-1} = D_c^{(r)}(A^*), K_c D_c^{(r)}(A) K_c^{-1} =$$

$$= D_c^{(r)}(A^*)).$$

Zur Bestimmung der PISDen von $\widetilde{\mathcal{P}}$ benötigen wir nach (3.40) und (4.16) die PUISDen von $\widetilde{\mathcal{P}}_p$. Aus physikalischen Gründen ist es interessant auch die PISDen der anderen Untergruppen von $\widetilde{\mathcal{P}}$ mit nur einer Inversion, nämlich von $\widetilde{\mathcal{P}}_T$ und $\widetilde{\mathcal{P}}_{PT}$ zu kennen; wir geben diese daher ebenfalls an.

(4.18) Satz: Die im folgenden definierten Abbildungen sind CIMDen von $\widetilde{\mathcal{P}}_p$ bzw. $\widetilde{\mathcal{P}}_T$ bzw. $\widetilde{\mathcal{P}}_{PT}$. Die durch diese MDen definierte Menge von CISDen besteht genau aus je einem Repräsentanten jeder Unitär-Äquivalenzklasse von PISDen von $\widetilde{\mathcal{P}}_p$ bzw. $\widetilde{\mathcal{P}}_T$ bzw. $\widetilde{\mathcal{P}}_{PT}$.
 $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, s \in \{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}$:

$$(a.1) U_{m,j}^P: \widetilde{\mathcal{P}}_p \rightarrow \mathcal{U}_+(H_{m,j}), (a, A) \mapsto U_{m,j}(a, A), I_s \mapsto P_{m,j}.$$

$$(a.2) U_{o,s}^P: \widetilde{\mathcal{P}}_p \rightarrow \mathcal{U}_+(H_o \oplus H_o), s > 0, (a, A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{o,s}(a, A) & 0 \\ 0 & U_{o,-s}(a, A) \end{pmatrix},$$

$$I_s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{2s} P_{o,-s} \\ P_{o,s} & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 & U_{o,o}^P: \tilde{\mathcal{P}}_P \rightarrow \mathcal{U}_+(H_o), (a,A) \mapsto U_{o,o}(a,A), I_s \mapsto P_{o,o}. \\
 (a.3) & U_{c,r}^P: \tilde{\mathcal{P}}_P \rightarrow \mathcal{U}_+(H_c), (a,A) \mapsto U_{c,r}(a,A), I_s \mapsto P_{c,r}. \\
 (b.1) & U_{m,j}^{T,+}: \tilde{\mathcal{P}}_T \rightarrow \mathcal{U}(H_{m,j}), (a,A) \mapsto U_{m,j}(a,A), I_t \mapsto T_{m,j}; \\
 & U_{m,j}^{T,-}: \tilde{\mathcal{P}}_T \rightarrow \mathcal{U}(H_{m,j} \oplus H_{m,j}), \\
 & (a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{m,j}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{m,j}(a,A) \end{pmatrix}, I_t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & T_{m,j} \\ -T_{m,j} & 0 \end{pmatrix}. \\
 (b.2) & U_{o,s}^{T,+}: \tilde{\mathcal{P}}_T \rightarrow \mathcal{U}(H_o), (a,A) \mapsto U_{o,s}(a,A), I_t \mapsto T_{o,s}; \\
 & U_{o,s}^{T,-}: \tilde{\mathcal{P}}_T \rightarrow \mathcal{U}(H_o \oplus H_o), \\
 & (a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{o,s}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{o,s}(a,A) \end{pmatrix}, I_t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & T_{o,s} \\ -T_{o,s} & 0 \end{pmatrix}. \\
 (b.3) & U_{c,r}^{T,+}: \tilde{\mathcal{P}}_T \rightarrow \mathcal{U}(H_c), (a,A) \mapsto U_{c,r}(a,A), I_t \mapsto T_{c,r}; \\
 & U_{c,r}^{T,-}: \tilde{\mathcal{P}}_T \rightarrow \mathcal{U}(H_c \oplus H_c), \\
 & (a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{c,r}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{c,r}(a,A) \end{pmatrix}, I_t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & T_{c,r} \\ -T_{c,r} & 0 \end{pmatrix}. \\
 (c.1) & U_{m,j}^{PT,+}: \tilde{\mathcal{P}}_{PT} \rightarrow \mathcal{U}(H_{m,j}), (a,A) \mapsto U_{m,j}(a,A), I_{st} \mapsto P_{m,j} T_{m,j}; \\
 & U_{m,j}^{PT,-}: \tilde{\mathcal{P}}_{PT} \rightarrow \mathcal{U}(H_{m,j} \oplus H_{m,j}), \\
 & (a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{m,j}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{m,j}(a,A) \end{pmatrix}, I_{st} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & P_{m,j} T_{m,j} \\ -P_{m,j} T_{m,j} & 0 \end{pmatrix}, \\
 (c.2) & U_{o,s}^{PT,\eta}: \tilde{\mathcal{P}}_{PT} \rightarrow \mathcal{U}(H_o \oplus H_o), \eta \in \{1, -1\} \text{ für } s \neq 0 \text{ und } \eta = -1 \text{ für } s = 0, \\
 & (a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{o,s}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{o,-s}(a,A) \end{pmatrix}, I_{st} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{2s} P_{o,-s} T_{o,-s} \\ P_{o,s} T_{o,s} & 0 \end{pmatrix}; \\
 & U_{o,o}^{PT,+}: \tilde{\mathcal{P}}_{PT} \rightarrow \mathcal{U}(H_o), (a,A) \mapsto U_{o,o}(a,A), I_{st} \mapsto P_{o,s} T_{o,s}. \\
 (c.3) & U_{c,r}^{PT,+}: \tilde{\mathcal{P}}_{PT} \rightarrow \mathcal{U}(H_c), (a,A) \mapsto U_{m,j}(a,A), I_{st} \mapsto P_{c,r} T_{c,r}; \\
 & U_{c,r}^{PT,-}: \tilde{\mathcal{P}}_{PT} \rightarrow \mathcal{U}(H_c \oplus H_c), \\
 & (a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{c,r}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{c,r}(a,A) \end{pmatrix}, I_{st} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & P_{c,r} T_{c,r} \\ -P_{c,r} T_{c,r} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dabei sei für alle Darstellungen U der nicht angegebene Wert $U(a,A,I_i)$, $i=s$ bzw. $i=t$ bzw. $i=st$, definiert durch $U(a,A,I) := U(a,A)U(I)$.

Beweis: Er besteht in einer, nach Kenntnis von (4.17) ziemlich trivialen Anwendung von (3.40). Da alle Fälle ähnlich sind, beweisen wir nur (a.1)-(a.3).

Der einzige offene Normalteiler von $\tilde{\mathcal{P}}_P$ vom Index 2 ist $\tilde{\mathcal{P}}_o$, und wir wählen d aus (3.40.I) als $d=I_s$. Die Darstellungen $U_{m,j}$ bzw. $U_{o,o}$

bzw. $U_{c,r}$ erfüllen nach (4.17) die Bedingung (3.40.α) mit $\tilde{V} = \tilde{V}_{m,j}^P$ bzw. $\tilde{V} = \tilde{V}_{o,o}^P$ bzw. $\tilde{V} = \tilde{V}_{c,r}^P$. Damit liefert (3.40.a) gerade die Darstellungen $\tilde{U}_{m,j}^P$, $\tilde{U}_{o,o}^P$ und $\tilde{U}_{c,r}^P$. Für die Darstellungen $\tilde{U}_{o,s}, s \neq 0$ ist (3.40.β) erfüllt und (3.40.α) nicht erfüllt. Dabei gilt β) wegen $\omega \equiv 1$ genau mit $\varphi \equiv 1$, denn nach (4.6) gibt es keinen nichttrivialen Homomorphismus von $\mathcal{P}$ in $\mathbb{C}_1$. Gälte α), so gäbe es einen unitären Operator V mit $U_{o,s}(a,A) = \mu(a,A) V U_{o,s}(I_s a, (A^+)^{-1}) V^{-1}$, $\mu(a,A) \in \mathbb{C}_1$; da $U_{o,s}$ eine ED ist, so müßte μ ein Homomorphismus sein; somit folgte aus (4.6): $\mu \equiv 1$. Es gälte also mit (4.17) $U_{o,s}(a,A) = V P_{o,s}^{-1} U_{o,s}(a,A) (V P_{o,s}^{-1})^{-1}$; das ist aber unmöglich, weil $U_{o,s}$ und $U_{o,-s}$ für $s \neq 0$ unitär inäquivalent sind. Damit liefert (3.40.b) nach einer Äquivalenztransformation mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_{o,s} \end{pmatrix}$ gerade die Strahldarstellung $\tilde{U}_{o,s}^P$. ■

(4.19) Satz: Die in (a) - (c) definierten Abbildungen sind CIMDen von $\tilde{\mathcal{P}}$. Die durch diese MDen definierte Menge von CISDen besteht genau aus je einem Repräsentanten jeder Unitär-Äquivalenzklasse von PISDen von $\tilde{\mathcal{P}}$.

(a) $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$:

$$\begin{aligned} U_{m,j}^{(+,+)}: \tilde{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathcal{U}(H_{m,j}), \\ (a,A) &\longmapsto U_{m,j}(a,A), \quad I_s \longmapsto P_{m,j}, \\ I_t &\longmapsto T_{m,j}, \quad I_{st} \longmapsto P_{m,j} T_{m,j} \\ U_{m,j}^{(\xi,\eta)}: \tilde{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathcal{U}(H_{m,j} \oplus H_{m,j}), (\xi,\eta) \in \{(+,-), (-,+), (-,-)\}, \\ (a,A) &\longmapsto \begin{pmatrix} U_{m,j}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{m,j}(a,A) \end{pmatrix}, I_s \longmapsto \begin{pmatrix} P_{m,j} & 0 \\ 0 & \xi \eta P_{m,j} \end{pmatrix}, \\ I_t &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & T_{m,j} \\ \xi T_{m,j} & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{st} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & P_{m,j} T_{m,j} \\ \eta P_{m,j} T_{m,j} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) $s \in \{\pm 1/2, \pm 1, \dots\}$:

$$\begin{aligned} U_{o,s}^{(+,\eta)}: \tilde{\mathcal{P}} &\longrightarrow \mathcal{U}(H_o \oplus H_o), \eta \in \{+,-\}, \\ (a,A) &\longmapsto \begin{pmatrix} U_{o,s}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{o,-s}(a,A) \end{pmatrix}, I_s \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{2s} P_{o,-s} \\ P_{o,s} & 0 \end{pmatrix}, \\ I_t &\longmapsto \begin{pmatrix} T_{o,s} & 0 \\ 0 & \eta T_{o,-s} \end{pmatrix}, \quad I_{st} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & \eta (-1)^{2s} P_{o,-s} T_{o,-s} \\ P_{o,s} T_{o,s} & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$U_{o,s}^{(-,\eta)}: \tilde{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{U}(H_o \oplus H_o \oplus H_o \oplus H_o), \eta \in \{+,-\},$$

$$(a,A) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} U_{o,s}(a,A) & 0 & & \\ 0 & U_{o,-s}(a,A) & & \\ \hline & & U_{o,s}(a,A) & 0 \\ & & 0 & U_{o,-s}(a,A) \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned}
 I_s &\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-1)^{2s} P_{o,-s} \\ \hline P_{o,s} & 0 \end{array} \right), I_t \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & T_{o,s} \\ \hline -T_{o,s} & 0 \end{array} \right), \\
 I_{st} &\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & (-1)^{2s} P_{o,-s} \\ \hline P_{o,s} & 0 \end{array} \right), I_{st} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\eta(-1)^{2s} P_{o,-s} T_{o,-s} \\ \hline P_{o,s} T_{o,s} & 0 \end{array} \right); \\
 I_{st} &\rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & \eta(-1)^{2s} P_{o,-s} T_{o,-s} \\ \hline -P_{o,s} T_{o,s} & 0 \end{array} \right);
 \end{aligned}$$

$$U_{o,o}^{(+,+)}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}(H_o),$$

$$(a,A) \mapsto U_{o,o}(a,A), I_s \mapsto P_{o,o}, I_t \mapsto T_{o,o}, I_{st} \mapsto P_{o,o} T_{o,o};$$

$$U_{o,o}^{(\xi,\eta)}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}(H_o \oplus H_o), (\xi,\eta) \in \{(+,-), (-,+), (-,-)\},$$

$$(a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{o,o}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{o,o}(a,A) \end{pmatrix}, I_s \mapsto \begin{pmatrix} P_{o,o} & 0 \\ 0 & \xi \eta P_{o,o} \end{pmatrix},$$

$$I_t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & T_{o,o} \\ \xi T_{o,o} & 0 \end{pmatrix}, I_{st} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & P_{o,o} T_{o,o} \\ \eta P_{o,o} T_{o,o} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$U_{c,r}^{(+,+)}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}(H_{c,r}),$$

$$(a,A) \mapsto U_{c,r}(a,A), I_s \mapsto P_{c,r}, I_t \mapsto T_{c,r}, I_{st} \mapsto P_{c,r} T_{c,r};$$

$$U_{c,r}^{(\xi,\eta)}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}(H_{c,r} \oplus H_{c,r}), (\xi,\eta) \in \{(+,-), (-,+), (-,-)\},$$

$$(a,A) \mapsto \begin{pmatrix} U_{c,r}(a,A) & 0 \\ 0 & U_{c,r}(a,A) \end{pmatrix}, I_s \mapsto \begin{pmatrix} P_{c,r} & 0 \\ 0 & \xi \eta P_{c,r} \end{pmatrix},$$

$$I_t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & T_{c,r} \\ \xi T_{c,r} & 0 \end{pmatrix}, I_{st} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & P_{c,r} T_{c,r} \\ \eta P_{c,r} T_{c,r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei seien für alle Darstellungen U die nicht angegebenen Werte $U(a,A,I_i), i \in \{s,t,st\}$, definiert durch $U(a,A,I_i) := U(a,A)U(I_i)$.

(d) Die Multiplikatoren der MDen (a) - (c) stimmen mit denen aus

(4.5) bei folgender Wahl der Parameter α und β überein:

$$U_{m,j}^{(\xi,\eta)}: \alpha = \xi(-1)^{2j}, \beta = \eta(-1)^{2j},$$

$$U_{o,s}^{(\xi,\eta)}: \alpha = \xi(-1)^{2s}, \beta = \eta(-1)^{2s},$$

$$U_{c,r}^{(\xi,\eta)}: \alpha = \xi \text{sign}(r), \beta = \eta \text{sign}(r);$$

(e) Die in (a) - (c) auftretenden und in (4.17) erklärten Operatoren P, T, PT haben folgende explizite Gestalt:

$$(P_{m,j}\psi)(p) = \psi(I_s p), (T_{m,j}\psi)(p) = D^{(j)}(\Gamma)\psi^*(I_s p),$$

$$(P_{m,j} T_{m,j} \psi)(p) = D^{(j)}(\Gamma) \psi^*(p);$$

$$(P_{0,s} \psi)(p) = \left(\frac{-p^1 + ip^2}{|p^1 + ip^2|^2} \right)^{2s} \psi(I_s p), (T_{0,s} \psi)(p) = \left(\frac{-p^1 + ip^2}{|p^1 - ip^2|^2} \right)^{2s} \psi^*(I_s p),$$

$$(P_{0,s} T_{0,s} \psi)(p) = (-1)^{2s} \psi^*(p);$$

$$(P_{c,r} \psi)(p)_\omega = e^{-ir \operatorname{Re}(\omega \hat{p})} (i\omega \hat{p})^\varepsilon \psi(I_s p) (\hat{p}^2 \omega)^*;$$

$$(T_{c,r} \psi)(p)_\omega = e^{-ir \operatorname{Re}(\omega \hat{p})} (\hat{p}^*)^\varepsilon \psi^*(I_s p) - (\hat{p}^2 \omega)^*;$$

$$(P_{c,r} T_{c,r} \psi)(p)_\omega = (-i\omega)^\varepsilon \psi^*(p)_{-\omega}, \text{ mit:}$$

$$\hat{p} := (p^1 + ip^2) / |p^1 + ip^2|, \hat{p} := \hat{p} / |p^1 + ip^2|, \varepsilon := (1 - \operatorname{sign}(r)) / 2.$$

Beweis: Wegen (4.16) erhält man die PISDn von $\tilde{\mathcal{P}}$ aus den FUISDn von $\tilde{\mathcal{P}}_P$ aus (4.18.a) durch Anwendung von (3.40.II). Sei

U: $\tilde{\mathcal{P}}_P \rightarrow \mathcal{U}_+(H)$ eine beliebige MD aus (4.18.a) und $\tilde{U}$ die zugehörige SD. U erfüllt (3.40.8') mit $d=I_t$ genau dann, wenn es $W \in \mathcal{U}_-(H), \tau, \lambda \in \mathbb{C}_1$ und eine Funktion $\mu: \tilde{\mathcal{P}}_0 \rightarrow \mathbb{C}_1$ gibt, mit

$$(1) \forall (a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \quad (U(a, A) = \mu(a, A) W U(I_t a, (A^+)^{-1}) W^{-1}),$$

$$(2) U(I_s) = \tau W U(I_s) W^{-1}, (3) W^2 = \lambda I_H. \text{ Wegen (1) ist } \mu \text{ ein Homomorphismus,}$$

so daß aus (4.6) folgt: $\mu \equiv 1$. Sind W und W' Lösungen von (1), so

$$\text{folgt: } \forall g \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \quad (W' W^{-1} U(g) = U(g) W' W^{-1}) \text{ und somit: } W' W^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}_1, \text{ für } U = U_{0,s}^P, s \neq 0 \text{ und } W' W^{-1} = \alpha I, \alpha \in \mathbb{C}_1, \text{ für } U = U_{m,j}^P,$$

$U = U_{0,o}^P, U = U_{c,r}^P$. Mit (4.17) findet man, daß (3.40.8') stets erfüllt ist und daß alle Lösungen W, τ, λ von (1) - (3) gegeben sind durch:

$$W = \alpha T_{m,j}, \alpha \in \mathbb{C}_1, \tau = 1, \lambda = (-1)^{2j} \text{ für } U = U_{m,j}^P,$$

$$W = \alpha T_{0,o}, \alpha \in \mathbb{C}_1, \tau = 1, \lambda = 1 \text{ für } U = U_{0,o}^P,$$

$$W = \alpha \begin{pmatrix} T_{0,s} & 0 \\ 0 & \eta T_{0,-s} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}_1, \eta \in \{1, -1\}, \tau = \eta, \lambda = (-1)^{2s} \text{ für } U = U_{0,s}^P, s \neq 0,$$

$$W = \alpha T_{c,r}, \alpha \in \mathbb{C}_1, \tau = 1, \lambda = \operatorname{sign}(r) \text{ für } U = U_{c,r}^P. \text{ Alle Homomorphismen von } \tilde{\mathcal{P}}_P$$

in $\mathbb{C}_1$ sind wegen (4.6) gegeben durch $\chi_\lambda(a, A) := 1, \chi_\lambda(I_s) := \lambda,$

$\lambda \in \{1, -1\}$ und stetig. Damit sind alle Größen bekannt, die für die

Angabe der Darstellungen aus (3.40.II) nötig sind. Ausgehend von

$U_{m,j}^P, U_{0,o}^P, U_{c,r}^P$ erhält man jeweils eine "unverdoppelte" Darstellung

und je vier "verdoppelte" Darstellungen nach (3.40.e), je nach der

Wahl von χ und der Wahl von ε . Von den "verdoppelten" Darstellungen

erweist sich eine nach (3.40.6) als reduzibel; die vier irreduziblen

sind in (4.19.a-c) angegeben. Ausgehend von $U_{0,s}^P, s \neq 0$ erhält man für

jedes der zwei möglichen W eine unverdoppelte Darstellung; beide

sind irreduzibel. Verdoppelte Darstellungen erhält man nach (3.40.e)

je nach Wahl von W, X und ε insgesamt acht; davon erweisen sich nach (3.40.6) vier als reduzibel und vom Rest erweisen sich je zwei, deren Multiplikatoren übereinstimmen, als unitäräquivalent. Insgesamt erhält man also aus $U_{0,s}^P, s \neq 0$ vier irreduzible Darstellungen, die in (4.19.b) angegeben sind. Daß die in (4.19) angegebenen Darstellungen paarweise inäquivalent sind, folgt daraus, daß sie entweder auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ eingeschränkt inäquivalent sind, oder aber inäquivalente Multiplikatoren besitzen; letztere kann man leicht ausrechnen und damit (d) bestätigen. Zur Verifikation von (e) benützt man (4.17) und die im Beweis von (4.17) angegebenen Identitäten. ■

Zum Abschluß machen wir eine interessante Aussage über die nicht notwendig irreduziblen PSD von $\tilde{\mathcal{P}}_0$.

(4.20) Satz: Sei $\tilde{U}$ eine PSD von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ und es gelten die Bezeichnungen aus (4.15). Dann gilt:

(a) Es gibt eine CBD von $\tilde{\mathcal{P}}_T$, die auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ eingeschränkt von $\tilde{U}$ erzeugt wird.

(b) Eine CBD von $\tilde{\mathcal{P}}_P$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}_{ST}$ bzw. $\tilde{\mathcal{P}}$, die auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ eingeschränkt von $\tilde{U}$ erzeugt wird, gibt es genau dann, wenn gilt:

$$\forall s \in \{1/2, 1, \dots\} (N_0(s) = N_0(-s)).$$

Beweis: (a) Wir setzen $\hat{U}(I_t) := \bigoplus_s N_0(s) U_{0,s}^{T,+}(I_t) \oplus \int_{\mathcal{S}_C} (dr) N_C(r) U_{c,r}^{T,+}(I_t) \oplus \int_{\mathcal{S}(dm)} \bigoplus_j N(m,j) U_{m,j}^{T,+}(I_t)$. Durch $\hat{U}(a,A) := U'(a,A), U(a,A, I_t) :=$

$= U'(a,A) \hat{U}(I_t)$ ist dann eine Version $\hat{U}$ einer CBD definiert. U ist genau dann eine MD, wenn $(U(I_t))^2 = 1$ gilt; ist dies nicht der Fall, so sind $(1 + \varepsilon U(I_t))^2 / 2, \varepsilon \in \{1, -1\}$, die Projektoren, die nach (2.1) die Überauswahlregeln im Bündelraum definieren.

(b) Angenommen es gibt eine CBD mit den Eigenschaften aus (b). Dann ist ihre Einschränkung auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ nach (3.8) und (3.11) direkte Summe von SDen, denn $\tilde{\mathcal{P}}_0$ ist zusammenhängend. Da weiter $\tilde{\mathcal{P}}_0$ nur triviale Multiplikatoren besitzt, gibt es eine Version der CBD, die auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ eingeschränkt eine ED, und somit nach einer unitären Transformation von der Form U' aus (4.15) ist. Da nach (4.18), (4.19) die Darstellungen $U_{0,s}^P, U_{0,s}^{PT,2}, U_{0,s}^{(\xi, \eta)}, s \neq 0$, auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ eingeschränkt, von der Form $(a,A) \mapsto n(U_{0,s}(a,A) \oplus U_{0,-s}(a,A)), n \in \{1, 2\}$, sind, folgt durch Zerlegung in irreduzible EDen $N_0(s) = N_0(-s)$. Die umgekehrte Richtung folgt durch Konstruktion analog zu (a). ■

5. Die volle Poincarégruppe in der Feldtheorie

Die Beschreibung relativistischer Teilchen wird heute meist als Feldtheorie formuliert. Dabei sind relativistisches Transformationsverhalten und Operationen wie Ladungskonjugation oder Raum- und Zeit-

Inversion für die Feldoperatoren geläufiger als für die zugrundeliegenden Zustandsvektoren. Um die physikalische Diskussion der Darstellungen der vollen Poincarégruppe vorzubereiten, konstruieren wir mit Hilfe dieser Darstellungen freie Wightmanfelder und berechnen deren Transformationsverhalten unter $\tilde{\mathcal{P}}$. Dabei erhalten wir die üblichen Konventionen über das Transformationsverhalten von Feldern unter Raum-, Zeit- und totaler Inversion als Spezialfälle und eine einfache, durch keine "löchertheoretische Uminterpretation" gestörte Deutung dieser Konventionen in Begriffen des Einteilchen-Zustandsraumes.

5.1. Spinorform für die PISDs von $\mathcal{P}$

Für ein Wightmanfeld fordert man folgendes Transformationsverhalten unter $\tilde{\mathcal{P}}_0$ (vgl. (5.30.c)):

$$(5.1) \quad U(a, A) \Phi_\alpha(f) U(a, A)^{-1} = \sum_{\beta} S_{\alpha\beta}(A^{-1}) \Phi_\beta(\{a, A\}f),$$

wobei U eine PED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ und S eine endlichdimensionale Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$ ist. (5.1) hat zunächst wenig Ähnlichkeit mit dem Transformationsgesetz, das die Darstellungen (4.14) für die Einteilchenzustände liefern. Als ersten Schritt zur Konstruktion von Feldern mit dem Transformationsverhalten (5.1) bringen wir die Darstellungen (4.14) durch eine unitäre Äquivalenztransformation in die folgende zu (5.1) analoge Form, die wir Spinorform nennen:

$$(5.2) \quad (U(a, A) \psi)_\alpha(p) = \sum_{\beta} e^{ip \cdot a} S_{\alpha\beta}(A) \psi_\beta(\wedge(A^{-1})p),$$

wobei S wieder eine endlichdimensionale Darstellung von $SL(2, \mathbb{C})$ ist. Für eine PISD gibt es i. allg. mehrere Spinorformen, die sich hauptsächlich durch die Anzahl der Komponenten der Wellenfunktionen unterscheiden. So gibt es neben der üblichen Beschreibung des Elektrons durch eine 4-komponentige Wellenfunktion eine solche, die mit 2 Komponenten auskommt. Wir wählen unter den Möglichkeiten nach folgendem Gesichtspunkt aus: Die Spinorform soll sich aus (4.14) durch eine möglichst einfache Äquivalenztransformation ergeben. Überdies geben wir Spinorformen nur für Darstellungen mit diskretem Spin an^{†)}

+) Nach [16] gibt es für kontinuierlichen Spin keine freien Wightmanfelder, auch wenn in (5.30.c) $n=\infty$ zugelassen wird.

(5.3) Satz: Seien $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $j \in \{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}$ und sei für alle $p \in \mathcal{O}_m$ der Hilbertraum $X_j(p)$ definiert als der Vektorraum $\mathbb{C}^{2|j|+1}$ mit dem Skalarprodukt $\langle x|y \rangle_p = \langle x|D^{(j)}(\tilde{p})y \rangle$, wobei $\langle | \rangle$ das euklidische Skalarprodukt ist. Dann gilt:

(a) $Q_{m,j}: H_{m,j} \rightarrow H_{m,j} := \int_0^m \mu_m(dp) X_j(p)$, $(Q_{m,j} \psi)(p) := D^{(j)}(m^{-1/2} A_m(p)) \psi(p)$, ist unitär.

(b) Für $\underline{U}_{m,j}(a,A) := Q_{m,j} U_{m,|j|}(a,A) Q_{m,j}^{-1}$ gilt:

$$(\underline{U}_{m,j}(a,A) \psi)(p) = e^{i p a D^{(j)}(A)} \psi(\wedge(A^{-1})p).$$

Insbesondere sind $\underline{U}_{m,j}$ und $\underline{U}_{m,-j}$ unitäräquivalent.

Beweis: (a) Mit (4.9), (4.12) gilt: $\forall \psi \in H_{m,j}$ $(\|Q_{m,j} \psi\|_{H_{m,j}}^2 = \int \mu_m(dp) D^{(j)}(m^{-1/2} A_m(p)) \psi(p) \|_p^2 = \int \mu_m(dp) \langle \psi(p) | D^{(j)}(A_m^+(p) \tilde{p} A_m(p)/m) \psi(p) \rangle = \int \mu_m(dp) \|\psi(p)\|_p^2 = \|\psi\|_{H_{m,j}}^2$, so daß $Q_{m,j}$ isometrisch ist. Offen-

bar ist durch $(Q_{m,j}^{-1} \psi)(p) = D^{(j)}(m^{-1/2} A_m^{-1}(p)) \psi(p)$ die zu $Q_{m,j}$ inverse Abbildung gegeben, so daß $Q_{m,j}$ unitär ist. Es sei bemerkt, daß damit auch gezeigt ist, daß $\langle | \rangle_p$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

(b) Mit (4.9) und (4.14) folgt:

$$(\underline{U}_{m,j}(a,A) \psi)(p) = e^{i p a D^{(j)}(A)} (A_m(p)^m A_m^{-1}(\wedge(A^{-1})p)) \psi(\wedge(A^{-1})p) = e^{i p a D^{(j)}(A)} \psi(\wedge(A^{-1})p).$$

Damit haben wir die PISD aus (4.14), die zu positiver Masse gehören, auf Spinorform gebracht. Für $m=0$ läßt sich eine analoge Rechnung nicht ohne weiteres durchführen, da hier die Wellenfunktionen nach (4.14) einkomponentig sind (nur eine Möglichkeit der Spineinstellung!), während einkomponentige Wellenfunktionen mit dem Transformationsverhalten (5.2) bekanntlich nur spinlose Teilchen beschreiben. Man muß also zusätzliche Komponenten einführen und es gibt zwei Möglichkeiten zu verhindern, daß damit die Zahl der Spinfreiheitsgrade anwächst: Entweder man unterwirft die Wellenfunktionen Nebenbedingungen, oder man sorgt durch ein semidefinites "Skalarprodukt" dafür, daß die Wellenfunktionen, die unzulässigen Spineinstellungen entsprechen, die Norm Null bekommen. Wir benützen die letzte Methode, denn sie liefert formale Übereinstimmung mit dem Fall $m>0$ und eignet sich wegen des Fehlens von Nebenbedingungen am besten zur Konstruktion von Wightmanfeldern.

Zunächst stellen wir einige Begriffe und Fakten über Vektorräume mit semidefinitem Skalarprodukt zusammen und zeigen, daß deren wohlverstandener Gebrauch nur ein formaler Kunstgriff ist und die Grund-

lagen der Quantentheorie in keiner Weise berührt.

(5.4) Def: Seien X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $B: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche positiv semidefinite Sesquilinearform auf X . Dann bezeichnen wir mit $\bar{X}$ den Quotientenraum von X nach dem Unterraum $X_0 := \{x \in X \mid B(x, x) = 0\}$, und mit $\bar{x} := x + X_0$ seine Elemente. Ist $\bar{X}$ bzgl. des Skalarprodukts $B: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{C}$, $B(\bar{x}, \bar{y}) := B(x, y)$, vollständig, und somit ein Hilbertraum, so nennen wir X (genauer: das Paar (X, B)) einen Pseudohilbertraum und B ein Pseudoskalarprodukt.

Gewisse Abbildungen von X erzeugen Abbildungen von $\bar{X}$; einfache Überlegungen zeigen:

(5.5) Satz: Seien (X, B) und (X', B') Pseudohilberträume und $A: X \rightarrow X'$ eine semilineare Abbildung mit $A(X_0) \subset X'_0$. Dann ist durch $A: \bar{X} \rightarrow \bar{X}'$, $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$, eine semilineare Abbildung auf dem Hilbertraum $\bar{X}$ definiert und es gilt:

- (a) A injektiv $\iff A^{-1}(X'_0) \subset X_0$,
- (b) A surjektiv $\iff A(X) + X'_0 = X'$,
- (c) A isometrisch, d.h. $\forall x, y \in X$ ($B(Ax, Ax) = B'(x, y)$ für A linear und $B(Ax, Ay) = B'(x, y)^*$ für A antilinear), und A surjektiv $\implies A \in \mathcal{U}(\bar{X})$.

Damit kann man die für die Darstellungstheorie wesentlichen Operatorgruppen $\mathcal{U}(H)$, $\tilde{\mathcal{U}}(H)$ etc. sinngemäß auch für Pseudohilberträume einführen:

(5.6) Def: Sei X ein Pseudohilbertraum. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(X) &:= \{A \mid A: X \rightarrow X \text{ semilinear, } A(X_0) \subset X_0, A \in \mathcal{U}(\bar{X})\}, \\ \tilde{\mathcal{U}}(X) &:= \mathcal{U}(X) / \mathcal{C}(X) \text{ mit } \mathcal{C}(X) := \{\omega \cdot 1_{\bar{X}} \mid \omega \in \mathbb{C}_1\}, \\ \mathcal{U}_+(X) &:= \{A \in \mathcal{U}(X) \mid A \in \mathcal{U}_+(\bar{X})\}, \quad \mathcal{U}_-(X) := \mathcal{U}(X) \setminus \mathcal{U}_+(X), \\ \tilde{\mathcal{U}}_+(X) &:= \mathcal{U}_+(X) / \mathcal{C}(X), \quad \tilde{\mathcal{U}}_-(X) := \tilde{\mathcal{U}}(X) \setminus \tilde{\mathcal{U}}_+(X). \end{aligned}$$

Dabei sind $\mathcal{U}(X)$ bzw. $\tilde{\mathcal{U}}(X)$ aufzufassen als topologische Gruppen mit der Initialtopologie bzgl. der Homomorphismen $\Theta: \mathcal{U}(X) \rightarrow \mathcal{U}(\bar{X})$, $A \mapsto A$, bzw. $\tilde{\Theta}: \tilde{\mathcal{U}}(X) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\bar{X})$, $x \mathcal{C}(X) \mapsto \bar{x} \mathcal{C}(\bar{X})$. Eine Abbildung ϑ einer Gruppe G in $\tilde{\mathcal{U}}(X)$ bzw. $\mathcal{U}(X)$ nennen wir eine SD bzw. ω -D, wenn $\vartheta := \tilde{\Theta} \circ \vartheta$ bzw. $\vartheta := \Theta \circ \vartheta$ eine SD bzw. ω -D im bisherigen Sinn ist.

Die nun zu behandelnden Darstellungen für $m=0$ lassen sich in einem Pseudohilbertraum einfacher formulieren und handhaben als in einem Hilbertraum; die physikalisch allein wesentlichen Hilbertraumdarstellungen gewinnt man dann durch die "·"-Operation aus (5.6).

(5.7) Satz: Seien $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$ und sei für alle $p \in O_0$ der Pseudohilbertraum $X_s(p)$ definiert als der Vektorraum $\mathbb{C}^{2|s|+1}$ mit dem Pseudoskalarprodukt $\langle x|y \rangle_p := \langle x|D^{(s)}(\tilde{p})y \rangle$, wobei $\langle | \rangle$ das euklidische Skalarprodukt ist. Dann gilt:

(a) $Q_{0,s}: H_0 \longrightarrow \underline{H}_{0,s} := \int_O \mu_0(dp) X_s(p)^+$, $(Q_{0,s}\psi)(p) := D^{(s)}(A_0(p)) \mathcal{L}_s(\psi(p))$ mit $\mathcal{L}_s: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{2|s|+1}$, $z \longmapsto (z, 0, \dots, 0)$ bzw. $z \longmapsto (0, \dots, 0, z)$ je nachdem ob $s \geq 0$ oder $s < 0$, ist isometrisch und $\underline{Q}_{0,s}: \underline{H}_0 \longrightarrow \underline{H}_{0,s}$ ist unitär.

(b) Mit $\underline{U}_{0,s}: \tilde{\mathcal{P}}_0 \longrightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_{0,s})$,
 $(\underline{U}_{0,s}(a,A)\psi)(p) := e^{ipa} D^{(s)}(A) \psi(\wedge(A^{-1})p)$,
 gilt: $\underline{U}_{0,s}(a,A) = \underline{Q}_{0,s} U_{0,s}(a,A) (\underline{Q}_{0,s})^{-1}$.

Beweis: Er beruht wesentlich auf den folgenden, mit (4.10) und (4.12) leicht zu verifizierenden Formeln:

(1) $\forall p \in O_0 (A_0^+(p) \tilde{p} A_0(p) = \tilde{k}_0)$, (2) $D^{(s)}(\tilde{k}_0)_{ik} = \delta_{1i} \delta_{1k}$ bzw. $= \delta_{2|s|+1, i} \times \delta_{2|s|+1, k}$ je nachdem ob $s \geq 0$ oder $s < 0$. (3) $\forall A \in E(2) (D_0^{(s)}(A) = D^{(s)}(A)_{11}$ bzw. $= D^{(s)}(A)_{2|s|+1, 2|s|+1}$ je nachdem ob $s \geq 0$ oder $s < 0$).

(a) Für alle $\psi \in H_0$ gilt: $\|Q_{0,s}\psi\|_{\underline{H}_{0,s}}^2 = \int \mu_0(dp) \|D^{(s)}(A_0(p)) \mathcal{L}_s(\psi(p))\|_p^2 = \int \mu_0(dp) \langle \mathcal{L}_s(\psi(p)) | D^{(s)}(A_0^+(p) \tilde{p} A_0(p)) \mathcal{L}_s(\psi(p)) \rangle = \int \mu_0(dp) \psi^*(p) \psi(p) = \|\psi\|_{H_0}^2$. Mit (5.5.b) prüft man leicht nach, daß

$\underline{Q}_{0,s}$ surjektiv ist; damit folgt aus (5.5.c) die Behauptung.

(b) Es genügt offenbar zu zeigen, daß für alle $\psi \in H_0$, $\varphi \in \underline{H}_{0,s}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \underline{U}_{0,s}(a,A) \underline{Q}_{0,s} \psi \rangle &= \langle \varphi | \underline{Q}_{0,s} U_{0,s}(a,A) \psi \rangle. \\ \langle \varphi | \underline{U}_{0,s}(a,A) \underline{Q}_{0,s} \psi \rangle &= \int \mu_0(dp) e^{ipa} \langle \varphi(p) | D^{(s)}(\tilde{p}) D^{(s)}(A A_0(\wedge(A^{-1})p)) \mathcal{L}_s(\psi(\wedge(A^{-1})p)) \rangle \\ &= \int \mu_0(dp) e^{ipa} \langle D^{(s)}(A_0^{-1}(p)) \varphi(p) | D^{(s)}(\tilde{k}_0) D^{(s)}(A_0^{-1}(p) A A_0(\wedge(A^{-1})p)) \mathcal{L}_s(\psi(\wedge(A^{-1})p)) \rangle \\ &= \int \mu_0(dp) \langle D^{(s)}(A_0^{-1}(p)) \varphi(p) | D^{(s)}(\tilde{k}_0) \mathcal{L}_s((U_{0,s}(a,A)\psi)(p)) \rangle \\ &= \int \mu_0(dp) \langle \varphi(p) | D^{(s)}(\tilde{p}) D^{(s)}(A_0(p)) \mathcal{L}_s((U_{0,s}(a,A)\psi)(p)) \rangle \\ &= \int \mu_0(dp) \langle \varphi(p) | D^{(s)}(p) (Q_{0,s} U_{0,s}(a,A) \psi)(p) \rangle \\ &= \langle \varphi | Q_{0,s} U_{0,s}(a,A) \psi \rangle. \end{aligned}$$

+) Das direkte Integral von Pseudohilberträumen wird analog zu dem von Hilberträumen erklärt.

Damit ist neben der Herstellung der Spinorform für die Darstellungen mit $m=0$ obendrein eine fast vollständige Vereinheitlichung in der expliziten Form der Darstellungen zu $m \neq 0$ und $m > 0$ erreicht. In beiden Fällen werden nach (5.3) und (5.7) sowohl die Darstellungsoperatoren als auch das "Skalarprodukt" im Darstellungsraum durch dieselben Rechenausdrücke beschrieben. Die Abhängigkeit von der Masse wird allein durch den Definitionsbereich der "Wellenfunktionen", nämlich das jeweilige Massenhypersboloid gegeben. Für $m=0$ ist dann, als qualitativer Unterschied zum Fall $m > 0$, das "Skalarprodukt" nicht mehr streng definit und $\underline{U}_{0,s}$ ist nicht zu $\underline{U}_{0,-s}$ äquivalent. Mit Hilfe der Operatoren Q aus (5.3) und (5.7) kann man nun leicht Operatoren konstruieren, welche die Darstellungen (4.19) von $\tilde{\mathcal{D}}$ auf Spinorform transformieren.

(5.8) Satz: Seien $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$. Dann gilt:

(a) Die anschließend definierten Abbildungen sind CIMDen von $\tilde{\mathcal{D}}$.

$${}_s U_{m,j}^{(+,+)}: \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_{m,j}),$$

$$({}_s U_{m,j}^{(+,+)}(a, A) \psi)(p) := e^{i p a} D^{(j)}(A) \psi(\wedge(A^{-1})p),$$

$$({}_s U_{m,j}^{(+,+)}(I_s) \psi)(p) := D^{(j)}(p/m) \psi(I_s p),$$

$$({}_s U_{m,j}^{(+,+)}(I_t) \psi)(p) := D^{(j)}(\Gamma) \psi^*(I_s p),$$

$$({}_s U_{m,j}^{(+,+)}(I_{st}) \psi)(p) := D^{(j)}(p \Gamma / m) \psi^*(p);$$

$${}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}: \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_{m,j} \oplus \underline{H}_{m,j}), \quad (\xi, \eta) \in \{(+, -), (-, +), (-, -)\},$$

$$({}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(a, A) \psi)_b(p) := e^{i p a} D^{(j)}(A) \psi_b(\wedge(A^{-1})p)$$

$$\text{mit } b=1, 2 \text{ und } \psi := (\psi_1, \psi_2) \in \underline{H}_{m,j} \oplus \underline{H}_{m,j},$$

$$({}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(I_s) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \eta \end{pmatrix}_{bc} D^{(j)}(p/m) \psi_c(I_s p),$$

$$({}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(I_t) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}_{bc} D^{(j)}(\Gamma) \psi_c^*(I_s p),$$

$$({}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(I_{st}) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{pmatrix}_{bc} D^{(j)}(p \Gamma / m) \psi_c^*(p);$$

$$\forall \xi, \eta \in \{+, -\}, (a, A, I_j) \in \tilde{\mathcal{D}} \quad ({}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(a, A, I_j)) :=$$

$${}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(a, A) {}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(I_j).$$

(b) $Q_{m,j}^{(\xi, \eta)} := Q_{m,j}$ bzw. $:= Q_{m,j} \oplus Q_{m,j}$, je nachdem ob $(\xi, \eta) = (+, +)$ oder $(\xi, \eta) \in \{(+, -), (-, +), (-, -)\}$, ist eine unitäre Abbildung im $\underline{H}_{m,j}$

bzw. $\underline{H}_{m,j} \oplus \underline{H}_{m,j}$ und es gilt:

$$\forall \xi, \eta \in \{+, -\}, g \in \widetilde{\mathcal{D}} \quad ({}_s U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(g) = Q_{m,j}^{(\xi, \eta)} U_{m,j}^{(\xi, \eta)}(g) Q_{m,j}^{(\xi, \eta)-1})$$

mit $U_{m,j}^{(\xi, \eta)}$ aus (4.19.a).

Beweis: Die Unitarität von $Q_{m,j}^{(\xi, \eta)}$ ist mit (5.3) trivial. Um die Gleichung in (b) nachzurechnen, werden nur folgende leicht zu verifizierende Gleichungen benötigt: $(Q_{m,j} P_{m,j} Q_{m,j}^{-1} \psi)(p) = D^{(j)}(p/m) \psi(I_s p)$, $(Q_{m,j} T_{m,j} Q_{m,j}^{-1} \psi)(p) = D^{(j)}(\Gamma) \psi^*(I_s p)$. Mit (b) sind dann die ${}_s U$ aus (a) wegen (4.19.a) trivialerweise CIMDen von $\widetilde{\mathcal{D}}$.

(5.9) **Satz:** Seien $m=0$, $s \in \{1/2, 1, \dots\}$. Dann gilt:

(a) Die anschließend definierten Abbildungen sind CIMDen von $\widetilde{\mathcal{D}}$.

$${}_s U_{0,s}^{(+, \eta)}: \widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s}, \eta \in \{+, -\},$$

$$({}_s U_{0,s}^{(+, \eta)}(a, A) \psi)_b(p) := \begin{cases} e^{i p a_D(s)} (A) \psi_b(\wedge(A^{-1})p) & \text{für } b=1 \\ e^{i p a_D(-s)} (A) \psi_b(\wedge(A^{-1})p) & \text{für } b=2 \end{cases}$$

$$\text{mit } \psi = (\psi_1, \psi_2) \in \underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s},$$

$$({}_s U_{0,s}^{(+, \eta)}(I_s) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{bc} \psi_c(I_s p),$$

$$({}_s U_{0,s}^{(+, \eta)}(I_t) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}_{bc} D^{(s)}(\Gamma) \psi_c^*(I_s p),$$

$$({}_s U_{0,s}^{(+, \eta)}(I_{st}) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{bc} D^{(s)}(\Gamma) \psi_c^*(p);$$

$${}_s U_{0,s}^{(-, \eta)}: \widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s} \oplus \underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s}, \eta \in \{+, -\},$$

$$({}_s U_{0,s}^{(-, \eta)}(a, A) \psi)_b(p) := \begin{cases} e^{i p a_D(s)} (A) \psi_b(\wedge(A^{-1})p) & \text{für } b \in \{1, 3\} \\ e^{i p a_D(-s)} (A) \psi_b(\wedge(A^{-1})p) & \text{für } b \in \{2, 4\} \end{cases}$$

$$\text{mit } \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \in \underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s} \oplus \underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s},$$

$$({}_s U_{0,s}^{(-, \eta)}(I_s) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{bc} \psi_c(I_s p),$$

$$({}_s U_{0,s}^{(-, \eta)}(I_t) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}_{bc} D^{(s)}(\Gamma) \psi_c^*(I_s p),$$

$$({}_s U_{0,s}^{(-, \eta)}(I_{st}) \psi)_b(p) := \sum_{c=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{bc} D^{(s)}(\Gamma) \psi_c^*(p);$$

$$\forall \xi, \eta \in \{+, -\}, (a, A, I_j) \in \widetilde{\mathcal{D}} \quad ({}_s U_{0,s}^{(\xi, \eta)}(a, A, I_j) :=$$

$${}_s U_{0,s}^{(\xi, \eta)}(a, A) {}_s U_{0,s}^{(\xi, \eta)}(I_j)).$$

(b) $Q(\xi, \eta) := Q_{0,s} \oplus Q_{0,-s}$ bzw. $:= Q_{0,s} \oplus Q_{0,-s} \oplus Q_{0,s} \oplus Q_{0,-s}$, je nachdem ob $\xi = 1$ oder $\xi = -1$, ist eine isometrische Abbildung in $\underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s}$ bzw. $\underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s} \oplus \underline{H}_{0,s} \oplus \underline{H}_{0,-s}$ und es gilt:

$$\forall \xi, \eta \in \{+, -\}, g \in \widetilde{\mathcal{P}} \quad {}_{\Delta}U_{0,s}^{(\xi, \eta)}(g) = Q_{0,s}^{(\xi, \eta)} U_{0,s}^{(\xi, \eta)}(g) (Q_{0,s}^{(\xi, \eta)})^{-1}$$

mit $U_{0,s}^{(\xi, \eta)}$ aus (4.19.b).

Beweis: Die Isometrie von $Q_{0,s}^{(\xi, \eta)}$ ist mit (5.7) trivial. Um die Gleichung in (b) nachzurechnen, werden allein die folgenden Gleichungen benötigt:

$$Q_{0,-s} P_{0,s} = {}_{\Delta}P_{0,s} Q_{0,s}, {}_{\Delta}P_{0,s} : \underline{H}_{0,s} \longrightarrow \underline{H}_{0,-s}, ({}_{\Delta}P_{0,s} \psi)(p) := (\text{sign } s)^{2s} \psi(I_s p),$$

$$Q_{0,s} T_{0,s} = {}_{\Delta}T_{0,s} Q_{0,s}, {}_{\Delta}T_{0,s} : \underline{H}_{0,s} \longrightarrow \underline{H}_{0,s}, ({}_{\Delta}T_{0,s} \psi)(p) := D^{(s)}(\Gamma) \psi^*(I_s p).$$

Davon beweisen wir hier nur die erste und notieren zuvor einige leicht zu verifizierende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (1) \quad D^{(s)}(\tilde{k}_0) \downarrow_s &= \downarrow_s, \quad (2) \quad \downarrow_s D^{(s)}_0(A) = D^{(s)}(\tilde{k}_0) D^{(s)}(A) \downarrow_s, A \in \mathbb{E}(2), \\ (3) \quad D^{(s)}(\Gamma) \downarrow_s &= (\text{sign } s)^{2s} \downarrow_s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle \varphi | Q_{0,-s} P_{0,s} \psi \rangle = \\ &= \int \mu_0(dp) \langle \varphi(p) | D^{(-s)}(\tilde{p}) D^{(s)}(A_0(p)) \downarrow_{-s} (D^{(-s)}_0(L^*(p)) \psi(I_s p)) \rangle = \\ &= \int \mu_0(dp) \langle \varphi(p) | D^{(-s)}(A_0^+(p)^{-1} \tilde{k}_0) D^{(-s)}(L^*(p)) \downarrow_{-s} (\psi(I_s p)) \rangle = \\ &\stackrel{(1)}{=} \stackrel{(3)}{=} (\text{sign } s)^{2s} \int \mu_0(dp) \langle \varphi(p) | D^{(-s)}(\tilde{p} A_0(p) \Gamma A_0(p)^t \Gamma^{-1} \Gamma A_0^*(I_s p) \\ &\Gamma^{-1}) \downarrow_s (\psi(I_s p)) \rangle = (\text{sign } s)^{2s} \int \mu_0(dp) \langle \varphi(p) | D^{(-s)}(\tilde{p}) D^{(s)}(A_0(I_s p)) \\ &\downarrow_s (\psi(I_s p)) \rangle = \langle \varphi | {}_{\Delta}P_{0,s} Q_{0,s} \psi \rangle. \end{aligned}$$

Mit (b) sind dann die ${}_{\Delta}U$ aus (a) wegen (4.19.b) CIMDen von $\widetilde{\mathcal{P}}$. ■

Wir geben nun eine Form der Darstellungen (5.8), (5.9) und einer später benötigten Klasse reduzibler Darstellungen an, welche die formalen Unterschiede zwischen $m=0$ und $m>0$ soweit als möglich beseitigt. Zuvor führen wir eine kompaktere Bezeichnungsweise für die Indizes ξ, η usw. ein.

(5.10) Mit $\mathcal{R}$ sei folgende Menge von Multiindizes bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \left\{ \begin{pmatrix} \xi, \eta \\ \mu, \varsigma \end{pmatrix} \mid \xi, \eta \in \{+, -\}, \mu \in \mathbb{R}_+, \varsigma \in \{0, 1/2, 1, \dots\} \right\} \cup \\ &\left\{ \begin{pmatrix} \xi, \eta, \chi \\ \mu, \varsigma \end{pmatrix} \mid \xi, \eta = +, \chi \in \{+, -\}, (\mu \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \text{ oder } (\mu, \varsigma) = (0, 0)) \right\}. \end{aligned}$$

Für jedes $\mathcal{S} \in \mathcal{R}$ setzen wir:

$$N_{\mathcal{S}} := \begin{cases} 1 & \text{für } \mathcal{S} = \begin{pmatrix} +, + \\ \mu, \varsigma \end{pmatrix} \text{ mit } (\mu > 0 \text{ oder } (\mu, \varsigma) = (0, 0)), \\ 4 & \text{für } \mu = 0, \varsigma > 0, \xi = -1, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge $\{1, \dots, N_{\mathcal{S}}\}$ bezeichnen wir ebenfalls mit $N_{\mathcal{S}}$. Weiter seien:

$$\mathcal{R}_1 := \{\mathcal{S} \in \mathcal{R} \mid N_{\mathcal{S}} = 1\},$$

$$\mathcal{R}_2 := \{ \varrho \in \mathcal{R} \mid N_\varrho = 2, \xi = +, \chi \in \{-, \emptyset\} \},$$

$$\mathcal{R}'_2 := \{ \varrho \in \mathcal{R} \mid N_\varrho = 2, \varrho \notin \mathcal{R}_2 \},$$

$$\mathcal{R}_4 := \{ \varrho \in \mathcal{R} \mid N_\varrho = 4 \}.$$

Offenbar gilt $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2 \cup \mathcal{R}_4$.

Endlich setzen wir $\hat{a} := (-1)^{a+1}$ für jedes $a \in \{1, \dots, N_\varrho\}$.

(5.11) Satz: (a) Für jedes $\varrho \in \mathcal{R}$ sei $\underline{H}_\varrho$ der Hilbertraum bzw. Pseudohilbertraum $\bigoplus_{a \in N_\varrho} \underline{H}_{\mu, \hat{a}\varrho}$; seine Elemente seien als N_ϱ -Tupel

$(\dots \psi_a \dots)$, $\psi_a \in \underline{H}_{\mu, \hat{a}\varrho}$, geschrieben. Dann sind die im folgenden definierten Abbildungen $\underline{U}_\varrho: \widetilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_\varrho)$ CMDen.

(a.1) $\varrho \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_4$

$$(\underline{U}_\varrho(a, A) \psi)_a(p) = e^{i p a_D(\hat{a}\varrho)}(A) \psi_a(\wedge(A^{-1})p),$$

$$(\underline{U}_\varrho(I_s) \psi)_a(p) = \sum_{b=1}^{N_\varrho} P_{ab}^\varrho \psi_b(I_s p),$$

$$(\underline{U}_\varrho(I_t) \psi)_a(p) = \sum_{b=1}^{N_\varrho} T_{ab}^\varrho D(\varrho)(\Gamma) \psi_b^*(I_s p),$$

$$(\underline{U}_\varrho(I_{st}) \psi)_a(p) = \sum_{b=1}^{N_\varrho} R_{ab}^\varrho D(\varrho)(\Gamma) \psi_b^*(p),$$

$$\forall (a, A, I_j) \in \widetilde{\mathcal{P}} \quad (\underline{U}_\varrho(a, A, I_j) := \underline{U}_\varrho(a, A) \underline{U}_\varrho(I_j)),$$

wobei die $N_\varrho \times N_\varrho$ -Matrizen P^ϱ, T^ϱ und R^ϱ für die jeweiligen Werte von ϱ gegeben sind durch:

$$\varrho \in \mathcal{R}_2 \quad \begin{matrix} P^\varrho & T^\varrho & R^\varrho \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{matrix}$$

$$\varrho \in \mathcal{R}_4 \quad \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \eta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

(a.2) $\varrho \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}'_2$

$$(\underline{U}_\varrho(a, A) \psi)_a(p) = e^{i p a_D(\hat{a}\varrho)}(A) \psi_a(\wedge(A^{-1})p),$$

$$(\underline{U}_\varrho(I_s) \psi)_a(p) = \sum_{b=1}^{N_\varrho} P_{ab}^\varrho D(\hat{b}\varrho)(\underline{p}/\mu) \psi_b(I_s p),$$

$$(\underline{U}_\varrho(I_t) \psi)_a(p) = \sum_{b=1}^{N_\varrho} T_{ab}^\varrho D(\hat{b}\varrho)(\widetilde{\mathcal{P}} \Gamma / \mu) \psi_b^*(I_s p),$$

$$(\underline{U}_\varrho(I_{st}) \psi)_a(p) = \sum_{b=1}^{N_\varrho} R_{ab}^\varrho D(\varrho)(\Gamma) \psi_b^*(p),$$

$$\forall (a, A, I_j) \in \widetilde{\mathcal{P}} \quad (\underline{U}_\varrho(a, A, I_j) := \underline{U}_\varrho(a, A) \underline{U}_\varrho(I_j)),$$

wobei die $N_\varrho \times N_\varrho$ -Matrizen P^ϱ, T^ϱ und R^ϱ für die jeweiligen Werte von ϱ gegeben sind durch:

	P^S	T^S	R^S
	(1)	(1)	(1)
$S \in \mathcal{R}_1$			
$\mathcal{R}'_2 \ni S = \begin{pmatrix} +, + \\ \mu, \epsilon \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{R}'_2 \ni S = \begin{pmatrix} -, + \\ \mu, \epsilon \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{R}'_2 \ni S = \begin{pmatrix} -, - \\ \mu, \epsilon \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- (b) Für jedes $S \in \mathcal{R}$ mit $\chi = \emptyset$ sind die von $\underline{U}_S$ aus (a) und die von ${}_A U_S$ aus (5.8), (5.9) erzeugten CISDen unitäräquivalent. Für jedes S aus $\mathcal{R}$ stimmt der Multiplikator von $\underline{U}_S$ mit $\omega_{\xi(-1)^{2\epsilon}, \eta(-1)^{2\epsilon}}$ aus (4.5) überein.

Beweis: Für $\mu = 0, \epsilon > 0$ sind die Darstellungen $\underline{U}_S$ identisch mit ${}_A U_S$ aus (5.9). Für $\mu > 0$ oder $(\mu, \epsilon) = (0, 0)$ werden die MDen $\underline{U}_S$ aus ${}_A U_S$ durch eine unitäre Transformation erhalten. Wir führen dies für $\mu > 0, \eta = (+, -)$ explizit durch; in den anderen Fällen hat man ganz analoge Verhältnisse. Für alle $\mu > 0, \epsilon \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$ ist $\tilde{A}: \underline{H}_{\mu, \epsilon} \longrightarrow \underline{H}_{\mu, -\epsilon}, (\tilde{A}\psi)(p) = D^{(\epsilon)}(\tilde{p}/\mu)\psi(p)$ eine unitäre Abbildung und es gilt: (1) $\underline{U}_{\mu, -\epsilon} = \tilde{A} {}_A U_{\mu, \epsilon} \tilde{A}^{-1}$. Das folgt leicht aus (5.3) mit $\tilde{A} = Q_{\mu, -\epsilon} Q_{\mu, \epsilon}^{-1}$. Mit $\tilde{A}: \underline{H}_{\mu, \epsilon} \oplus \underline{H}_{\mu, \epsilon} \longrightarrow \underline{H}_{\mu, \epsilon} \oplus \underline{H}_{\mu, -\epsilon}, (\tilde{A}\psi)_a := \sum_{b=1}^2 2^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \tilde{A} & \tilde{A} \end{pmatrix}_{ab} \psi_b$, gilt $\underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}(a, A) = \tilde{A} {}_A U_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}(a, A) \tilde{A}^{-1}, \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}(I_S) = \tilde{A} {}_A U_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}(I_S) \tilde{A}^{-1}, \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}(I_j) = -\tilde{A} {}_A U_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}(I_j) \tilde{A}^{-1}, j \in \{t, st\}$. Damit ist die von $\underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}$ erzeugte SD unitäräquivalent zu der von ${}_A U_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}$ erzeugten; überdies stimmt der Multiplikator von $\underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}$ mit dem von ${}_A U_{\mu, \epsilon}^{(+, -)}$ und wegen (5.8.b) und (4.19.d) mit $\omega_{(-1)^{2\epsilon}, -(-1)^{2\epsilon}}$ aus (4.5) überein. ■

(5.12) **Def:** Eine PSD $\tilde{U}: \tilde{\mathcal{P}} \longrightarrow \tilde{U}(H)$ von $\tilde{\mathcal{P}}$ und jede Version von $\tilde{U}$ nennen wir verdoppelt, wenn H die orthogonale Summe zweier unter $\tilde{U}(\tilde{\mathcal{P}}_0)$ invarianter Teilräume H_1 ist, für die $\tilde{\mathcal{P}}_0 \longrightarrow \mathcal{U}(H_1), g \longrightarrow \tilde{U}(g)|_{H_1}, i=1, 2$, irreduzible SDen mit diskretem Spin sind, die unitäräquivalent sind oder sich im Vorzeichen der Helizität unterscheiden. Durch Abänderung des Laufbereichs des Index i definieren wir entsprechend unverdoppelte und vervierfachte PSDen.

(5.13) **Satz:** Die durch die CMDen $\{\underline{U}_S | S \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2\}$ erzeugte Menge von CSDen besteht genau aus je einem Repräsentanten jeder Unitäräquivalenzklasse von verdoppelten PSDen von $\tilde{\mathcal{P}}$.

Beweis: Für $\mu = 0, \xi > 0$ sind bereits die irreduziblen SDen mindestens verdoppelt, reduzible SDen also mindestens vervierfacht. Für $\mu > 0$ und für $(\mu, \xi) = (0, 0)$ ist jede reduzible verdoppelte SD unitäräquivalent zu einer Strahlsumme $\mathcal{S}U_{\mu, \xi}^{(+, +)} \oplus \mathcal{S}U_{\mu, \xi}^{(+, +)}$. Nach (3.39) gibt es bis auf unitäre Äquivalenz zwei solche Strahlsummen, die Versionen von der Form der MDen $\mathcal{S}U_{\mu, \xi}^{(\xi, \eta)}, (\xi, \eta) \neq (+, +)$, aus (5.8) besitzen mit den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ anstelle von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \eta & 0 \end{pmatrix}$. Man rechnet leicht nach, daß die zugehörigen Strahldarstellungen untereinander unitär inäquivalent sind. Eine unitäre Transformation, die derjenigen im Beweis von (5.11) analog ist, und eine Umwahl der Repräsentanten, welche den Multiplikator nicht ändert, führt die betrachteten Versionen über in $\underline{U}_{\mu, \xi}^{(+, +, +)}$ und $\underline{U}_{\mu, \xi}^{(+, +, -)}$.

5.2. Allgemeiner Fockraum-Formalismus

Aus dem Einteilchen-Zustandsraum läßt sich der Zustandsraum eines freien Vielteilchensystems durch eine einfache mathematische Konstruktion gewinnen. Dazu ist weder die Wahl einer Basis im Einteilchenraum, noch eine nähere Spezifizierung dieses Raumes nötig (s. [6]). Eine lehrbuchmäßige Darstellung findet man in [21] und eine prägnante Zusammenstellung in [27]. Deshalb geben wir nur die wichtigsten Definitionen und Formeln an, die u.a. der Festlegung der Bezeichnung dienen.

Als den Tensorraum $T(H)$ über dem Hilbertraum H bezeichnet man den Hilbertraum $T(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes_n H)$ mit $\otimes H := H \otimes \dots \otimes H$, n -mal, und $\otimes_0 H := \mathbb{C}$. Elemente von $T(H)$ der Form $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n, \psi_i \in H, n \in \mathbb{N}$, heißen nuklear. Für das Skalarprodukt nuklearer Elemente gilt:

$$(5.14) \quad \langle \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n | \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \langle \psi_1 | \varphi_1 \rangle \langle \psi_2 | \varphi_2 \rangle \dots \langle \psi_n | \varphi_n \rangle.$$

Die lineare Hülle $T_0(H)$ der nuklearen Elemente von $T(H)$ ist dicht in $T(H)$. Wenn wir einen linearen (oder antilinearen) Operator A auf $T(H)$ durch Angabe seiner Werte auf den nuklearen Vektoren definieren, so hat man sich stets die folgenden beiden Fortsetzungsprozesse ausgeführt zu denken:

1. Lineare (oder antilineare) Fortsetzung auf $T_0(H)$,
2. Bildung des Operatorabschlusses.

Der zweite Schritt ist genau dann möglich, wenn der erste einen Operator A liefert, dessen Adjungierte A^+ dicht definiert ist; was für die im folgenden betrachteten Operatoren stets der Fall ist; den Abschluß erhält man dann als $\bar{A} := (A^+)^+$. Ist A beschränkt, so ist $\bar{A}$ auf ganz $T(H)$ definiert und ebenfalls beschränkt; in diesem Fall erhält man die Abschließung einfacher durch stetige Fortsetzung.

Den Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungsoperator S_- bzw. S_+ definieren wir durch:

$$(5.15) \quad S_{\varepsilon}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \delta_{\varepsilon}(\sigma) \psi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma(n)},$$

wobei $\mathfrak{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ ist und $\delta_{\varepsilon}(\sigma) := 1$ bzw. $:= \text{sign}(\sigma)$ je nachdem ob $\varepsilon = -$ oder $\varepsilon = +$ gilt. S_+ und S_- sind Projektoren mit orthogonalen Bildräumen. $F_+(H) := S_+(T(H))$ bzw. $F_-(H) := S_-(T(H))$ sind der Fermionen-bzw. Bosonen-Fockraum über H . Für jedes $\psi \in H$ definieren wir auf $T(H)$ den Vernichtungsoperator

$$(5.16) \quad a(\psi)(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) := n^{1/2} \langle \psi | \psi_1 \rangle \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_n;$$

für den adjungierten Operator (Erzeugungsoperator) findet man mit (5.14):

$$(5.17) \quad a^+(\psi)(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) = (n+1)^{1/2} \psi \otimes \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n.$$

Es sei bemerkt, daß a^+ von seinem Argument linear, a dagegen antilinear abhängt. Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf den Fockräumen $F_{\varepsilon}(H)$ werden definiert durch:

$$(5.18) \quad c_{\varepsilon}(\psi) := S_{\varepsilon} a(\psi) | F_{\varepsilon}(H), \quad c_{\varepsilon}^+(\psi) := S_{\varepsilon} a^+(\psi) | F_{\varepsilon}(H), \quad \varepsilon \in \{+, -\};$$

dabei ist, wie man leicht sieht, $c_{\varepsilon}^+(\psi)$ tatsächlich der zu $c_{\varepsilon}(\psi)$ adjungierte Operator. Die wichtigsten Eigenschaften der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sind:

$$(5.19) \quad c_{\varepsilon}(\psi) S_{\varepsilon}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) = \\ = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (-\varepsilon)^{i+1} \langle \psi | \psi_i \rangle S_{\varepsilon}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{i-1} \otimes \psi_{i+1} \otimes \dots \otimes \psi_n),$$

$$(5.20) \quad c_{\varepsilon}^+(\psi) S_{\varepsilon}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) = (n+1)^{1/2} S_{\varepsilon}(\psi \otimes \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n),$$

$$(5.21) \quad \forall \varphi \in F_{\varepsilon}(H) \cap T_0(H) ([c_{\varepsilon}(\psi_1), c_{\varepsilon}(\psi_2)]_{\varepsilon} \varphi = 0,$$

$$[c_{\varepsilon}^+(\psi_1), c_{\varepsilon}^+(\psi_2)]_{\varepsilon} \varphi = 0, [c_{\varepsilon}(\psi_1), c_{\varepsilon}^+(\psi_2)]_{\varepsilon} \varphi = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \varphi).$$

Dabei gilt (5.21) für $\varepsilon = +$ sogar für alle $\varphi \in F_{\varepsilon}(H)$, da Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für $\varepsilon = +1$ beschränkt sind. Weiter gilt:

$$(5.22) \quad c_{\varepsilon}^+(\psi_1) \dots c_{\varepsilon}^+(\psi_n) \Omega = (n!)^{1/2} S_{\varepsilon}(\psi_n \otimes \dots \otimes \psi_1),$$

mit $\Omega := 1 \in \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als Teilraum von $F_{\varepsilon}(H)$ aufgefaßt wird. Der zu Ω gehörige Einheitsstrahl spielt in der Physik die Rolle des Vakuums; die Anwendung von Erzeugungsoperatoren auf das Vakuum und Bildung von Linearkombinationen liefert also eine dichte Teilmenge des Fockraums. Für das Skalarprodukt gilt:

$$(5.23) \quad \langle c_{\varepsilon}^{+}(\psi_1) \dots c_{\varepsilon}^{+}(\psi_n) \Omega | c_{\varepsilon}^{+}(\varphi_1) \dots c_{\varepsilon}^{+}(\varphi_m) \Omega \rangle = \\ = \delta_{n,m} \sum_{\delta \in \mathcal{F}_n} \delta_{\varepsilon}(\delta) \langle \psi_1 | \varphi_{\delta(1)} \rangle \dots \langle \psi_n | \varphi_{\delta(n)} \rangle.$$

Für $V \in \mathcal{U}(H)$ definiert man durch

(5.24) $\check{V}(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) := V\psi_1 \otimes \dots \otimes V\psi_n$ einen semiunitären Operator auf $T(H)$, der $F_{+}(H)$ und $F_{-}(H)$ jeweils invariant läßt und folglich auch semiunitäre Abbildungen der Fockräume liefert; diese Abbildungen nennen wir ebenfalls $\check{V}$. Für jedes $\varepsilon \in \{+, -\}$ hat $\check{V}$ die wichtige Eigenschaft:

$$(5.25) \quad \check{V} c_{\varepsilon}^{+}(\psi) \check{V}^{-1} = c_{\varepsilon}^{+}(V\psi), \quad \check{V} c_{\varepsilon}(\psi) \check{V}^{-1} = c_{\varepsilon}(V\psi).$$

Ist $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ eine ED einer Gruppe G , so ist offenbar durch $\check{U}: G \rightarrow \mathcal{U}(T(H)), g \mapsto (U(g))^{\vee}$, eine ED auf $T(H)$ bzw. durch Einschränkung auf $F_{\varepsilon}(H)$ gegeben; jedoch für MDen und SDen gilt Analoges i. allg. nicht. $\check{U}$ als ED auf $F_{\varepsilon}(H)$ nennen wir die zu U gehörige Fockdarstellung von G . Seien G eine Liegruppe mit Liealgebra $L(G)$ und $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ eine CED. Dann ist U vermöge

$$(5.26) \quad \forall x \in L(G) \quad (dU(x) := \text{st.Op.Lim.}_{\lambda \rightarrow 0} (U(\exp(\lambda x)) - 1_H) / \lambda)$$

eine schiefadungierte Darstellung dU von $L(G)$ zugeordnet; dasselbe gilt für $\check{U}$ und $d\check{U}$. Zwischen dU und $d\check{U}$ besteht folgende Beziehung:

$$(5.27) \quad d\check{U}(x)(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) = \\ = \sum_{i=1}^n \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{i-1} \otimes dU(x) \psi_i \otimes \psi_{i+1} \otimes \dots \otimes \psi_n;$$

diese Gleichung ist so zu verstehen, daß entweder beide Seiten existieren oder keine.

Für masselose Teilchen haben wir den Einteilchen-Zustandsraum in (5.7) als Pseudohilbertraum eingeführt. Man könnte nun die Definition des Fockraumes von Hilberträumen auf Pseudohilberträume übertragen, was keine Schwierigkeiten bereitet. Diesen Weg wollen wir aber nicht gehen, sondern auch für masselose Teilchen den Vielteilchenraum als "echten" Fockraum, also als Hilbertraum einführen. Um dennoch die Pseudohilbertraum-Formulierung im Einteilchenraum benützen

zu können, gehen wir folgendermaßen vor.

(5.28) **Def:** Seien H ein Pseudohilbertraum $\psi \in H, \forall \epsilon \in \mathcal{U}(H), U: G \longrightarrow \mathcal{U}(H)$, $g \longmapsto U(g)$, eine ED einer Gruppe G , und $\epsilon \in \{+, -\}$. Dann erklären wir $F_\epsilon(H) := F_\epsilon(H)$, $c_\epsilon(\psi) := c_\epsilon(\psi)$, $c_\epsilon^+(\psi) := c^+(\psi)$, $\check{V} := (\check{V})^\vee$ und $\check{U}: G \longrightarrow \mathcal{U}(F_\epsilon(H))$, $g \longmapsto (U(g))^\vee$; dabei ist $\check{U}$ eine ED von G .

Da die Symbole $F_\epsilon(H)$, $c_\epsilon(\psi)$, $c_\epsilon^+(\psi)$, $\check{V}$ und $\check{U}$ für Pseudohilberträume bisher nicht erklärt waren, können durch (5.28) keine Mißverständnisse entstehen.

(5.29) **Satz:** Seien H , V und ϵ wie in (5.28). Dann gilt:

- (a) $\forall \psi_1, \psi_2 \in H, \varphi \in F_\epsilon(H) \cap T_0(H) ([c_\epsilon(\psi_1), c_\epsilon(\psi_2)]_\epsilon \varphi = 0,$
 $[c_\epsilon^+(\psi_1), c_\epsilon^+(\psi_2)]_\epsilon \varphi = 0, [c_\epsilon(\psi_1), c_\epsilon^+(\psi_2)]_\epsilon \varphi = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_H \varphi),$
- (b) $\forall \psi \in H (v_{c_\epsilon(\psi)} v^{-1} = c_\epsilon(v\psi)),$ dasselbe für c_ϵ^+ ,
- (c) $c_\epsilon(\psi) = c_\epsilon^+(\psi) = 0 \iff \forall \psi' \in H (\langle \psi | \psi' \rangle = 0).$

Beweis: (a) Die beiden ersten Gleichungen sind mit (5.21) trivial;

$$[c(\psi_1), c^+(\psi_2)]\varphi = [c(\psi_1), c^+(\psi_2)]\varphi = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_H \varphi = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_H \varphi.$$

$$(b) \check{V}c(\psi)v^{-1} = c(\check{V}\psi) = c(v\psi) = c(v\psi).$$

$$(c) c^+(\psi) = c(\psi) \iff \psi = 0 \iff \forall \psi' \in H (\langle \psi | \psi' \rangle = 0) \iff \forall \psi' \in H (\langle \psi | \psi' \rangle = 0). \blacksquare$$

5.3. Konstruktion freier Felder mit Hilfe der PISDen von $\tilde{\mathcal{F}}$

Freie Felder gewinnt man üblicherweise durch sog. zweite Quantisierung aus einer Einteilchentheorie. Dabei treten, zumindest in der gängigen Lehrbuchformulierung, unbefriedigende Züge zweierlei Art zutage: Einmal bedarf die Methode der Ergänzung durch ad hoc-Verfahren wie etwa der löchertheoretischen Uminterpretation beim Diracfeld und der Einführung einer indefiniten Metrik beim Gupta-Bleuler-Formalismus des elektromagnetischen Feldes. Zum anderen sind die Feldoperatoren nicht auf einem Hilbertraum definiert. Die Schwierigkeiten der ersten Art werden zwar häufig als typische Vielteilcheneffekte angesehen, können aber durch eine Umformulierung der Einteilchentheorie beseitigt werden. Die zweite Schwierigkeit wird durch das Konzept der ausgeschmierten Felder überwunden.

Wir geben im folgenden eine Version der zweiten Quantisierung an, bei der die genannten Schwierigkeiten nicht auftreten. Sie gestattet freie Felder für beliebige Masse und beliebigen Spin systematisch aus einer entsprechenden Einteilchentheorie zu konstruieren, wobei die Feldoperatoren von vornherein auf einem Hilbertraum defi-

niert werden. Den Feldbegriff verstehen wir dabei im Sinne der folgenden Wightmanaxiome.

(5.30) Def: Seien H ein separabler Hilbertraum, $U: \widetilde{\mathcal{P}}_0 \rightarrow \mathcal{U}_+(H)$ eine UED, welche die direkte Summe aus der eindimensionalen Darstellung und einer PED ist, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ der Schwartzsche Raum der komplexwertigen temperierten Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ sein topologischer Dualraum, $\mathcal{L}(H)$ die Menge der linearen Operatoren auf H mit dichtem Definitionsbereich und $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt eine lineare Abbildung $\Phi: \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{L}(H) \times \dots \times \mathcal{L}(H)$, $f \mapsto (\Phi_1(f), \Phi_2(f), \dots, \Phi_n(f))$, ein n -komponentiges Feld bzgl. U , oder kurz ein Feld, wenn gilt:

(a) Es gibt einen dichten linearen Teilraum $\mathcal{D} \subset H$, auf dem für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ und alle $1 \leq \alpha \leq n$ sowohl $\Phi_\alpha(f)$ als auch $(\Phi_\alpha(f))^+$ definiert sind, der unter diesen Operatoren sowie unter U invariant ist und der den eindimensionalen, unter U invarianten Teilraum von H enthält.

(b) Für alle $x, y \in \mathcal{D}$ und alle $1 \leq \alpha \leq n$ gehört die Abbildung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{C}$ $f \mapsto \langle x | \Phi_\alpha(f) y \rangle$, zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$.

(c) Es gibt einen Homomorphismus $S: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ derart, daß gilt:

$$\begin{aligned} \forall (a, A) \in \widetilde{\mathcal{P}}_0, 1 \leq \alpha \leq n, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \quad & U(a, A) \Phi_\alpha(f) U(a, A)^{-1} = \\ & = \sum_{\beta=1}^n S(A^{-1})_{\alpha\beta} \Phi_\beta(\{a, A\}f) \\ \text{mit } \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad & (\{a, A\}f)(x) := f(\wedge(A^{-1})(x-a)). \end{aligned}$$

(d) Es gibt $\varepsilon \in \{1, -1\}$ derart, daß für alle raumartig getrennten⁺ $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq \alpha, \beta \leq n, x \in \mathcal{D} \quad & (\Phi_\alpha(f) \Phi_\beta(g) x + \varepsilon \Phi_\beta(g) \Phi_\alpha(f) x = 0 \\ \text{und } \Phi_\alpha(f) \Phi_\beta(g)^+ x + \varepsilon \Phi_\beta(g)^+ \Phi_\alpha(f) x = 0). \end{aligned}$$

Für jedes Feld $\Phi: f \mapsto (\Phi_1(f), \dots, \Phi_n(f))$ ist auch die Abbildung $\Phi^+: f \mapsto (\Phi_1^+(f), \dots, \Phi_n^+(f))$ mit $\Phi_\alpha^+(f) := \Phi_\alpha(f^*)^+$ ein Feld, das man das zu Φ adjungierte Feld nennt.

Es wird oft gegewhnt, daß durch diese Axiome nicht nur alle pathologischen, sondern auch alle nichttrivialen Züge einer Feldtheorie

+) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ heißen raumartig getrennt, wenn gilt: $\forall x, y \in \mathbb{R}^4 ((x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x)g(y) = 0)$.

ausgeschlossen werden. Jedenfalls sind die einzigen bekannten Felder im Sinn von (5.30) die sog. freien Felder und triviale Derivate davon. Im Lichte des Rekonstruktionstheorems ist es naheliegend, die "Freiheit" eines Feldern durch seine Wightmanfunktionen zu charakterisieren. Dagegen wollen wir den darstellungstheoretischen Aspekt in den Vordergrund stellen und eine Eigenschaft der mit dem Feld assoziierten Darstellung von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ als charakteristisch für seine Freiheit ansehen. Man sieht leicht, daß freie Felder im herkömmlichen Sinn der folgenden Definition genügen; die Umkehrung vermuten wir stark, ohne sie bewiesen zu haben.

(5.31) Def: Seien U eine endliche direkte Summe von PIEDen von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ auf einem Hilbertraum H und $\check{U}$ die zu U gehörige Fockdarstellung auf $F_{\mathcal{E}}(H)$. Dann verstehen wir unter einem freien Feld ein Feld bzgl. $\check{U}$, für das $\mathcal{D}$ aus (5.30.a) als $F_{\mathcal{E}}(H) \cap T_0(H)$ gewählt werden kann.

Den Sinn des Konzeptes der freien Felder sehen wir nicht darin, daß es eine Beschreibung des physikalisch ziemlich trivialen Systems nicht wechselwirkender Teilchen liefert, denn alle diesbezüglichen Aussagen lassen sich bereits aus der Fockdarstellung $\check{U}$ gewinnen. Die freien Felder sind vielmehr die einzigen verfügbaren Hilfsmittel zur Konstruktion von Wechselwirkungstermen. Diese lassen sich allerdings nicht, anders als im nichtrelativistischen Fall, als selbstadjungierte Operatoren auf dem Fockraum erklären; es gibt lediglich dicht definierte Bilinearformen, auf dem Fockraum, aus denen man durch Grenzprozesse, die i. allg. aus dem Fockraum hinausführen, eine konsistente relativistische Quantendynamik zu konstruieren trachtet. Sieht man die Rolle der freien Felder derart als Handwerkszeug zur Konstruktion von Hamilton- bzw. Lagrangeoperatoren, so ist die Frage nach dem Transformationsverhalten dieser Felder unter Raum-, Zeit- und totaler Inversion ohne Bezug auf einen bestimmten Wechselwirkungsansatz physikalisch sinnlos. Ist aber ein Wechselwirkungsansatz gegeben, so kann man die Invarianz oder Nichtinvarianz der Wechselwirkung unter den diskreten Operatoren nicht aufgrund irgendwelcher Ansätze für diese Operationen beurteilen, sondern man muß alle gruppentheoretischen Möglichkeiten betrachten. Deshalb konstruieren wir für jede PISD von $\tilde{\mathcal{P}}$ ein freies Feld, dessen Feldoperatoren im Fockraum über dem jeweiligen Darstellungsraum wirken. Das Transformationsverhalten der Feldoperatoren unter den diskreten Operatoren kann dann, wie das eines jeden Operators auf diesem Fockraum, aus der Wir

kung von $\tilde{\mathcal{P}}$ im Fockraum berechnet werden (vgl. 5.5).

Sei $\underline{U}_g: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{U}(\underline{H}_g)$ eine der Darstellungen aus (5.11). Die Elemente von $\underline{H}_g$ sind N_g -tupel, deren Komponenten ihrerseits $2g+1$ -komponentige komplexwertige Funktionen auf O_μ sind. Damit erklären wir für jedes $\alpha \in \{1, \dots, 2g+1\}$ und $a \in N_g$:

$$(5.32) \quad \mathcal{L}_{\alpha,a}: C^\infty(O_\mu) \rightarrow \underline{H}_g, \quad (\mathcal{L}_{\alpha,a} \varphi)(p) := (0, \dots, \overline{\varphi}(p), \dots, 0)$$

$\uparrow$ a-te Stelle
 mit $\overline{\varphi}(p)_\beta := \delta_{\alpha\beta} \varphi(p)$.

Die Fouriertransformation auf $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$ ist definiert durch:

$$(5.33) \quad \mathcal{F}: \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4), \quad (\mathcal{F}f)(p) = (2\pi)^{-2} \int e^{-ipx} f(x) d^4x,$$

und für $\mu \in \mathbb{R}_+$ sei $\mathcal{F}_\mu: \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4) \rightarrow C^\infty(O_\mu)$, $\mathcal{F}_\mu f := (\mathcal{F}f)|_{O_\mu}$.

Für jedes $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$ ist also $\mathcal{L}_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu f$ ein Element von $\underline{H}_g$. Auf $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$ wirkt $\tilde{\mathcal{P}}$ gemäß

$$(5.34) \quad (\{a, A, I\}f)(x) := f(I \wedge (A^{-1})(x-a))$$

als Transformationsgruppe; damit gilt $\{a, A\}f = \{a, A, I_0\}f$ und wir setzen $\{A\}f := \{0, A\}f$, $f_1 := \{0, 1, I_1\}f$ mit $i \in \{s, t, st\}$.

Die folgenden Operatoren werden die Rolle von Feldoperatoren spielen.

(5.35) Def: Für alle $g \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2g+1\}$, $a \in N_g$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$ sei $\Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^g(f)$ der folgende Operator auf $F_\varepsilon(\underline{H}_g)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^g(f) &:= \Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^{g(-)}(f) + \Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^{g(+)}(f) \text{ mit} \\ \Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^{g(-)}(f) &:= \sqrt{\pi} c_\varepsilon^+(\underline{U}_g(\Gamma)(\mathcal{L}_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu(\{\Gamma\}f_{st}))), \\ \Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^{g(+)}(f) &:= \sqrt{\pi} c_\varepsilon(\underline{U}_g(-\Gamma, I_{st})(\mathcal{L}_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu(\{\Gamma\}f))). \end{aligned}$$

Einsetzen der expliziten Form von $\underline{U}_g$ aus (5.11) in (5.35) liefert für alle $b \in N_g$, $\beta \in \{1, \dots, 2g+1\}$:

$$\begin{aligned} (5.35') \quad &(\underline{U}_g(\Gamma)(\mathcal{L}_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu(\{\Gamma\}f_{st})))_{\beta,b}(p) = \delta_{ba} D_{\beta\alpha}^{(g)}(\Gamma)(\mathcal{F}f_{st})(p), \\ &(\underline{U}_g(-\Gamma, I_{st})(\mathcal{L}_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu(\{\Gamma\}f)))_{\beta,b}(p) = R_{ba}^{(g)} \delta_{\beta\alpha} (\mathcal{F}f_{st}^*)(p). \end{aligned}$$

Die Indizes g und ε , welche die Wahl der Darstellung von $\tilde{\mathcal{P}}$ und der Statistik angeben, werden wir i. allg. weglassen, ebenso einen Teil der Klammern. Wir diskutieren nun die Eigenschaften (5.30) für die Operatoren $\Phi_{\alpha,a,\varepsilon}^g(f)$ um zu sehen, welche davon freie Felder bzgl. der Fockdarstellung $\underline{U}_g|_{\tilde{\mathcal{P}}_0}$ definieren.

(5.36) Satz: Für alle $g \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2g+1\}$, $a \in N_g$, $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ und $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_0$ gilt:

$$\check{\underline{U}}_g(a, A) \phi_{\alpha, a, \varepsilon}^{g(\pm)}(f) \check{\underline{U}}_g(a, A)^{-1} = \sum_{\beta=1}^{26+1} D(\hat{a}g) (A^{-1})_{\alpha\beta} \phi_{\beta, a, \varepsilon}^{g(\pm)}(\{a, A\}f).$$

Beweis: Sei $\pi_{\beta, b}$ die Abbildung, die jedem Element aus $\underline{H}_g$ seine β, b -Komponente zuordnet; dann gilt: $\sum_{\beta, b} \iota_{\beta, b} \circ \pi_{\beta, b} = \text{id}_{\underline{H}_g}$. Damit und mit

(5.29.b) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \check{\underline{U}}(a, A) \phi_{\alpha, a}^{(-)}(f) \check{\underline{U}}(a, A)^{-1} &= \gamma \pi c^+ (\underline{U}(a, A) \underline{U}(\Gamma) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} f_{st}) = \\ &= \gamma \pi \sum_{b, \beta} c^+ (\underline{U}(\Gamma) \iota_{\beta, b} \pi_{\beta, b} \underline{U}(\Lambda(\Gamma)a, \Gamma A \Gamma^{-1}) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} f_{st}). \end{aligned}$$

(5.3.b), (5.7.b), (5.33) und (5.34):

$$\begin{aligned} &(\pi_{\beta, b} \underline{U}(\Lambda(\Gamma)a, \Gamma A \Gamma^{-1}) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} f_{st})(p) = \\ &= \delta_{ab} e^{ip\Lambda(\Gamma)a} D(\hat{a}g) (\Gamma A \Gamma^{-1})_{\beta\alpha} (\mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} f_{st}) (\Lambda(\Gamma A^{-1} \Gamma^{-1})p) = \\ &= \delta_{ab} D(\hat{a}g) (A^{-1})_{\alpha\beta} (2\pi)^{-2} \int e^{-ip(-\Lambda(\Gamma)a + \Lambda(\Gamma A \Gamma^{-1})x)} f(-\Lambda(\Gamma)x) d^4x = \\ &= \delta_{ab} D(\hat{a}g) (A^{-1})_{\alpha\beta} (\mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\}(\{a, A\}f)_{st})(p). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $\phi^{(-)}$ sofort; die für $\phi^{(+)}$ beweist man entsprechend. ■

Damit wird (5.30.c) von der Operatormenge $\{\phi_{\alpha, a, \varepsilon}(f) | \alpha \in \{1, \dots, 26+1\}, a \in N_g, f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)\}$ für alle $g \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon \in \{+, -\}$ erfüllt. Die Forderung (5.30.d) dagegen hat einschneidende Konsequenzen. Um diese zu erkennen, berechnen wir Kommutator und Antikommutator der Operatoren aus (5.35) untereinander und mit ihren Adjungierten. Für eine kompakte Formulierung des Ergebnisses stellen wir einige Definitionen voran.

(5.37) Def: Für jedes $\mu \in \mathbb{R}_+$ sei $\Delta_{\mu}^{(\pm)} \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^4)$ erklärt durch:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu}^{(+)}(f) &:= (4\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{Q}_{\mu}} \mu_{\mu}(dp) (\mathcal{F}f)(p), \quad \Delta_{\mu}^{(-)}(f) := -\Delta_{\mu}^{(+)}(f_{st}); \text{ weiter} \\ \text{sei } \Delta_{\mu}(f) &:= \Delta_{\mu}^{(+)}(f) + \Delta_{\mu}^{(-)}(f). \end{aligned}$$

Das ist nichts anderes als die exakte Definition der "Kommutatorfunktionen" $\Delta (\equiv \Delta_m)$ und $D (\equiv \Delta_o)$ als Distributionen. Die Matrixelemente $D_{\alpha\beta}^{(j)}(A)$ sind nach (4.12.b) Polynome in den Matrixelementen von A . Mit $\partial := (\partial^{\nu}) = (\partial/\partial x^0, -\partial/\partial x^1, -\partial/\partial x^2, -\partial/\partial x^3)$ und $\tilde{\partial} := \partial^{\nu} \partial^{\nu}$ ist dann $D_{\alpha\beta}^{(j)}(\tilde{\partial})$ ein wohldefinierter stetiger Differentialoperator auf $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$, und man definiert seine Wirkung auf $\mathcal{Y}'(\mathbb{R}^4)$ durch:

$$(5.38) \quad \forall T \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^4) \quad (D_{\alpha\beta}^{(j)}(\tilde{\partial})T)(f) := T(D_{\alpha\beta}^{(j)}(-\tilde{\partial})f).$$

Für $f, g \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$ ist die Faltung $f * g \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$ definiert durch:

$$(5.39) \quad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^4} f(y) g(x-y) d^4y.$$

(5.40) Satz: Seien $\vartheta \in \mathcal{R}$, $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, 2\vartheta+1\}$, $a, b \in N_{\vartheta}$, $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ und $\varphi \in F_{\varepsilon}(\underline{H}_{\vartheta}) \cap T_0(\underline{H}_{\vartheta})$. Dann gilt mit R^{ϑ} aus (5.11):

$$[\phi_{\alpha, a, \varepsilon}^{\vartheta}(f), \phi_{\beta, b, \varepsilon}^{\vartheta}(g)]_{\varepsilon} \varphi =$$

$$= i D_{\alpha\beta}^{(\hat{a}\vartheta)} (i \hat{a} \hat{\partial} \Gamma) (R_{ba}^{\vartheta*} \Delta_{\mu}^{(+)} - R_{ab}^{\vartheta*} \Delta_{\mu}^{(-)}) (f * g_{st}) \varphi,$$

$$[\phi_{\alpha, a, \varepsilon}^{\vartheta}(f), \phi_{\beta, b, \varepsilon}^{\vartheta+}(g)]_{\varepsilon} \varphi =$$

$$= i \delta_{ab}^D (\hat{a}\vartheta) (i \hat{a} \hat{\partial}) (\Delta_{\mu}^{(+)} - (-1)^{2\vartheta} \Delta_{\mu}^{(-)}) (f * g_{st}) \varphi.$$

Beweis: Wir rechnen nur die erste Gleichung vor; der Beweis der zweiten verläuft analog, aber einfacher. Es gilt:

$$[\phi_{\alpha, a}^{\vartheta}(f), \phi_{\beta, b}^{\vartheta}(g)]_{\varepsilon} \varphi = \pi (\mathcal{E} A(\alpha, \beta; a, b; f, g) + A(\beta, \alpha; b, a; g, f)) \varphi \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta; a, b; f, g) &:= [c(\underline{U}(-\Gamma, I_{st}) \mathcal{L}_{\beta, b} \mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} g), c^+(\underline{U}(\Gamma) \mathcal{L}_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} f_{st})]_{\varepsilon} = \\ &= (-1)^{2\vartheta} R_{ab}^* \int \mu(dp) \sum_{\gamma} D^{(\vartheta)}(\Gamma)_{\gamma\beta} (\mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} g)(p) D^{(\hat{a}\vartheta)}(\tilde{\gamma})_{\gamma\alpha} (\mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} f_{st})(p) = \\ &= (-\hat{a})^{2\vartheta} R_{ab}^* \int \mu(dp) (\mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} g)(p) (\mathcal{F}_{\mu}\{\Gamma\} D_{\alpha\beta}^{(\hat{a}\vartheta)} (-i \hat{\partial} \Gamma) f_{st})(p) = \\ &= (-\hat{a})^{2\vartheta} (2\pi)^{-2} R_{ab}^* \int \mu(dp) \mathcal{F}_{\mu}((D^{(\hat{a}\vartheta)}(i \hat{\partial} \Gamma) (f * g_{st}))_{st}) = \\ &= i \pi^{-1} R_{ab}^* (D_{\alpha\beta}^{(\hat{a}\vartheta)} (\hat{a} \hat{\partial} \Gamma) \Delta^{(-)}) (f * g_{st}). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt die Behauptung. ■

Sind f und g raumartig getrennt, so ist $f * g_{st}$ eine Funktion mit raumartigem Träger. Für solche Funktionen verschwindet $\Delta^{(+)} + \Delta^{(-)}$, nicht aber $\Delta^{(+)} - \Delta^{(-)}$ (s. z.B. [26, p.721]). Damit folgt aus (5.40), daß für jedes $\vartheta \in \mathcal{R}$ und jedes $\varepsilon \in \{1, -1\}$ die Operatormenge $\{\phi_{\alpha, a, \varepsilon}^{\vartheta}(f) | \alpha \in \{1, \dots, 2\vartheta+1\}, a \in A \subset \{1, \dots, N_{\vartheta}\}, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)\}$ genau dann

(5.30.d) (mit dem Definitionsbereich $F_{\varepsilon}(\underline{H}_{\vartheta}) \cap T_0(\underline{H}_{\vartheta})$ der Feldoperatoren) erfüllt, wenn gilt: $(-\varepsilon)(-1)^{2\vartheta} = 1$ und $\forall a, b \in A$ $(R_{ab}^{\vartheta} = (-1)^{2\vartheta} R_{ba}^{\vartheta})$;

die erste Bedingung liefert gerade den richtigen Zusammenhang von Spin und Statistik. Sind nun $A \subset \{1, \dots, N_{\vartheta}\}$ und ε so gewählt, daß die genannten Bedingungen erfüllt sind, so ist die Abbildung

$f \mapsto (\phi_{\alpha, a, \varepsilon}^{\vartheta}(f))_{\alpha \in \{1, \dots, 2\vartheta+1\}, a \in A}$ ein $(2\vartheta+1) \times \text{card}(A)$ -komponentiges Feld bzgl. $\check{\mathcal{U}}_{\vartheta} | \check{\mathcal{P}}_0$, und wegen des Definitionsbereichs der Feldoperatoren ein freies Feld. Dazu ist nur noch (5.30.b) zu verifizieren. Das

führen wir hier nicht durch, sondern bemerken nur, daß man die dort betrachteten Matrixelemente für Vektoren $x, y \in F_{\varepsilon}(\underline{H}_{\vartheta}) \cap T_0(\underline{H}_{\vartheta})$ im wesentlichen durch Feldkommutatoren und damit nach (5.38) durch Distributionen aus $\mathcal{F}'(\mathbb{R}^4)$ ausdrücken kann. Durch explizite Berechnung der Vakuum Erwartungswerte der Feldoperatoren kann man auch zeigen,

daß unsere Felder freie Felder in dem vor (5.31) erläuterten Sinn sind. Zusammenfassend haben wir folgendes Resultat:

(5.41) Satz: Seien $g \in \mathcal{R}$ und $\varepsilon := (-1)^{2g+1}$. Dann ist die auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ definierte Abbildung $f \mapsto (\phi_{\alpha, a, \varepsilon}^g(f))_{\alpha \in \{1, \dots, 2g+1\}, a \in A}$ genau für folgende Wahl von A ein freies Feld:

$g \in \mathcal{R}_1$ $A = \{1\}$,

$g \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2$, $\eta = (-1)^{2g}$ $A \in \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
 $\eta = -(-1)^{2g}$ $A \in \{\{1\}, \{2\}\}$,

$g \in \mathcal{R}_4$ $\eta = (-1)^{2g}$ A beliebige nichtleere Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$,
 $\eta = -(-1)^{2g}$ A beliebige nichtleere Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$, die weder $\{2, 3\}$ noch $\{1, 4\}$ als Teilmenge enthält.

Da bei den Feldoperatoren aus (5.41) ε durch g festgelegt ist, lassen wir deren Index ε im folgenden weg. Weiter bezeichnen wir die freien Felder $f \mapsto (\phi_{\alpha, a}^g(f))_{\alpha \in \{1, \dots, 2g+1\}, a \in A}$ kurz mit ϕ_A^g . Eine einfache Rechnung zeigt, daß das freie Feld ϕ_A^g für $\mu > 0$, $(\xi, \eta) = (+, +)$ und $A = \{1\}$ mit dem in [31; S.137, (3.14)] angegebenen übereinstimmt.

5.4. Feldgleichungen

Zur Konstruktion der freien Felder ϕ_A^g in 5.3. haben wir nur die PISD von $\tilde{\mathcal{P}}$ benutzt und nicht gefordert, daß die Felder irgendwelchen relativistisch invarianten Gleichungen genügen. Es stellt sich jedoch heraus, daß jede Feldkomponente einzeln der Klein-Gordon-Gleichung für die jeweilige Masse genügt und daß für $\mu = 0$ das Feld überdies eine für beliebigen Spin verallgemeinerte Weylgleichung erfüllt. Weiter kann man durch eine ziemlich triviale Operation, die eine Verdopplung der Anzahl der Feldkomponenten mit sich bringt, aus jedem Feld ϕ_A^g ein Feld konstruieren, das einer verallgemeinerten Diracgleichung genügt. Bevor wir darauf näher eingehen müssen wir erklären, wie Differentialoperatoren auf Felder wirken.

(5.42) Def: Sei $P: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$, $P(x) := \sum_{n=0}^N \sum_{i_0 + \dots + i_3 = n} a_{i_0 \dots i_3} (x^0)^{i_0} \dots (x^3)^{i_3}$ eine Polynomfunktion. Dann ist

$P(\partial) := \sum_{n=0}^N \sum_{i_0 + \dots + i_3 = n} a_{i_0 \dots i_3} (\partial^0)^{i_0} \dots (\partial^3)^{i_3}$ ein stetiger Diffe-

rentialoperator auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$; seine Wirkung auf ein Feld ϕ sei:
 $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4) \quad ((P(\partial)\phi)(f) := \phi(P(-\partial)f).$

(5.43) Satz: Für alle $g \in \mathcal{R}, \alpha \in \{1, \dots, 2\sigma+1\}, a \in \mathbb{N}_g$ und $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ gilt:
 $((\partial^0)^2 - (\partial^1)^2 - (\partial^2)^2 - (\partial^3)^2 + \mu^2) \phi_{\alpha,a}^g(f) = 0.$

Beweis: Das folgt aus (5.35) sofort mit $\mathcal{F}_\mu(\square f) = -\mu^2 \mathcal{F}_\mu f.$ ■

(5.44) Satz: Für alle $g \in \mathcal{R}$ mit $\mu=0, \alpha \in \{1, \dots, 2\sigma+1\}, a \in \mathbb{N}_g$ und $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ gilt:

$$\left(\sum_{\beta=1}^{2\sigma+1} (D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g}) (i\tilde{\partial}) \phi_{\beta,a}^g \right) (f) = 0.$$

Beweis: $(D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g}) (i\tilde{\partial}) \phi_{\beta,a}^g(f) = \sqrt{\pi} \{ c^+ (\underline{U}(\Gamma) L_{\beta,a} \mathcal{F}_0\{\Gamma\} (D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g}) (-i\tilde{\partial}) f)_{st} +$
 $+ c(\underline{U}(-\Gamma, I_{st}) L_{\beta,a} \mathcal{F}_0\{\Gamma\} D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g}) (-i\tilde{\partial}) f \} . \mathcal{F}_0\{\Gamma\} D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (-i\tilde{\partial}) f =$
 $= D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (\hat{a} \wedge (\Gamma)_p) \mathcal{F}_0\{\Gamma\} f = D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (\hat{a} \Gamma (\tilde{p})^* \Gamma^{-1}) \mathcal{F}_0\{\Gamma\} f = D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (\hat{a}_p) \mathcal{F}_0\{\Gamma\} f.$ Für
 alle $\psi \in \underline{H}$ gilt: $\langle \psi | \sum_{\beta} L_{\beta,a} D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (\tilde{p}) \mathcal{F}_0\{\Gamma\} f \rangle =$
 $= \int \mu_o(dp) \sum_{\beta} \psi_{\beta,a}^*(p) D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (\tilde{p}) D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g} (\tilde{p}) (\mathcal{F}_0\{\Gamma\} f)(p) = 0,$ also
 $\sum_{\beta} (D_{\alpha\beta}^{\hat{a}g}) (i\tilde{\partial}) \phi_{\beta,a}^g(f) = 0.$ ■

Für $\sigma=1/2$ und $a=2$ (oder $a=4$) lautet (5.44):

$$\sum_{\beta=1}^2 (\delta_{\beta\alpha})_{\alpha\beta} (\partial^\nu \phi_{\beta}^g)(f) = 0$$

und stimmt mit der Weylgleichung für das Neutrino-feld überein.

Wir bringen nun die Felder ϕ_A^g in eine Form, die für Spin 1/2 gerade das Diracfeld liefert und die wir daher Diracform nennen. Die Ausgangsform bezeichnen wir als Theisform, weil ein Feld dieses Typs für Spin 1/2 zuerst von THEIS (s. [32]) diskutiert wurde.

(5.45) Satz: Seien ϕ_A^g eines der Felder aus (5.41), $\alpha, \beta \in \{1, \dots, 2(2\sigma+1)\},$
 $a, b \in A, \varepsilon = (-1)^{2\sigma+1}, f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4), (a, A) \in \mathcal{P}_0, \varphi \in \mathcal{F}_\varepsilon(\underline{H}_g) \cap T_0(\underline{H}_g)$ und
 $\Theta(\mu) := 0$ bzw. $:= 1$ je nachdem ob $\mu=0$ oder $\mu>0$.

Dann gelten für:

$$\psi_{\alpha,a}^g(f) := \sum_{\gamma=1}^{2(2\sigma+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_{\alpha\gamma}^{\hat{a}g} (i\hat{a}\tilde{\omega}/\mu) \end{pmatrix}_{\alpha\gamma} \phi_{\gamma,a}^g(f) \quad \text{für } \mu>0,$$

$$\psi_{\alpha,a}^g(f) := \sum_{\gamma=1}^{2(2\sigma+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\gamma} \phi_{\gamma,a}^g(f) \quad \text{für } \mu=0,$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha,a}^g(f) := \sum_{\gamma=1}^{2(2\epsilon+1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\gamma} (\Psi_{\gamma,a}^g(f^*))^+,$$

die folgenden Aussagen:

$$(a) \check{U}_g(a,A) \Psi_{\alpha,a}^g(f) \check{U}_g(a,A)^{-1} =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{2(2\epsilon+1)} \begin{pmatrix} D(\hat{a}\epsilon)(A^{-1}) & 0 \\ 0 & D(\hat{a}\epsilon)(A^+) \end{pmatrix}_{\alpha\gamma} \Psi_{\gamma,a}^g(\{a,A\}f),$$

$$(b) [\Psi_{\alpha,a}^g(f), \bar{\Psi}_{\beta,b}^g(g)]_{\epsilon} \varphi =$$

$$= i \delta_{ab} \left(\begin{pmatrix} \mu^{2\epsilon} & D(\hat{a}\epsilon)(i\hat{a}\partial) \\ \Theta(\mu)D(\hat{a}\epsilon)(i\hat{a}\partial) & \mu^{2\epsilon} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \Delta_{\mu} \right) (f * g_{st}) \varphi,$$

$$(c) [\Psi_{\alpha,a}^g(f), \Psi_{\beta,b}^g(g)]_{\epsilon} \varphi =$$

$$= i R_{ab}^* \left(\begin{pmatrix} D(\hat{a}\epsilon)(-i\hat{a}\partial\Gamma) & D(\epsilon)(\mu\Gamma) \\ D(\epsilon)(\mu\Gamma) & \Theta(\mu)D(\hat{a}\epsilon)(-i\hat{a}\partial\Gamma) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \Delta_{\mu} \right) (f * g_{st}) \varphi,$$

$$(d) \sum_{\gamma=1}^{2(2\epsilon+1)} \left(\begin{pmatrix} -\mu^{2\epsilon} & D(\hat{a}\epsilon)(i\hat{a}\partial) \\ D(\hat{a}\epsilon)(i\hat{a}\partial) & -\mu^{2\epsilon} \end{pmatrix}_{\alpha\gamma} \Psi_{\gamma,a}^g(f) \right) = 0.$$

(e) Die Abbildung $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4) \ni h \mapsto (\Psi_{\gamma,c}^g(h))_{\gamma \in \{1, \dots, 2(2\epsilon+1)\}, c \in A}$ ist ein freies Feld.

Beweis: (a) ist mit (5.36), (b) und (c) mit (5.40) und (d) mit (5.43) leicht nachzurechnen; (e) ist eine unmittelbare Folge aus (a) - (c).

Die Spezialisierung der Gleichung für $\epsilon=1/2$ erfolgt in (5.67); damit wird dann die Beziehung der Feldgleichung (5.45.d) zur Diracgleichung klar.

5.5. Transformationsverhalten der freien Felder unter Inversionen und unter Ladungskonjugation.

Die Feldoperatoren $\phi_{\alpha,a}^g(f)$ aus (5.35) sind auf einem Fockraum definiert, auf dessen Einteilchenraum eine SD der vollen Poincaregruppe gegeben ist. Damit kann man für jeden der Operatoren $\underline{U}_g(I_1)$, $i \in \{s, t, st\}$, aus (5.11) die transformierten Feldoperatoren $(\tau_1 \underline{U}_g(I_1))^\vee \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_1 \underline{U}_g(I_1))^\vee^{-1}$, $\tau_1 \in \mathbb{C}_1$, berechnen. Allerdings ist die Abbildung $(a, A, I_1) \mapsto (\tau_1 \underline{U}_g(a, A, I_1))$ i.allg. keine Version einer SD von $\tilde{\mathcal{P}}$ und die transformierten Feldoperatoren sind abhängig von der Wahl

der Phasenfaktoren τ_1 . Auf die damit zusammenhängenden darstellungstheoretischen und physikalischen Fragen gehen wir in 6.3. ein. Bei beliebiger Wahl der τ_1 ergibt sich für $(\tau_1 \underline{U}_g(I_1)) \phi_{\alpha,a}^g(f)$ $(\tau_1 \underline{U}_g(I_1))^{\nu-1}$ ein Ausdruck in $\phi^{g(+)}$ und $\phi^{g(-)}$, der sich i.allg. nicht zu einem in ϕ^g oder ϕ^{g+} zusammenfassen läßt; für welche τ_1 eine solche Zusammenfassung möglich ist, hängt davon ab, ob man nur Ausdrücke in ϕ^g oder auch solche in ϕ^{g+} zuläßt. Wir behandeln beide Möglichkeiten, die letzte aber nur für eine bestimmte Klasse von Darstellungen.

(5.46) Satz: Seien $g \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \{1, \dots, 2\epsilon+1\}$, $a \in \{1, \dots, N_g\}$ und $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^4)$. Dann gilt

(a) für $g \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_4$, $\tau_s^2 = \tau_t^2 = \xi \eta$, $\tau_{st}^2 = 1$:

$$(\tau_s \underline{U}_g(I_s))^{\nu} \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_s \underline{U}_g(I_s))^{\nu-1} = \tau_s \sum_{b=1}^{N_g} P_{ba}^g \phi_{\alpha,b}^g(f_s),$$

$$\begin{aligned} (\tau_t \underline{U}_g(I_t))^{\nu} \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_t \underline{U}_g(I_t))^{\nu-1} = \\ = \tau_t \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} T_{ba}^g D_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(-\Gamma) \phi_{\beta,b}^g(f_t^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tau_{st} \underline{U}_g(I_{st}))^{\nu} \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_{st} \underline{U}_g(I_{st}))^{\nu-1} = \\ = \tau_{st} \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} R_{ba}^g D_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(-\Gamma) \phi_{\beta,b}^g(f_{st}^*); \end{aligned}$$

(b) für $g \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2'$,

$$\tau_s^2 = \tau_t^2 = (-1)^{2\epsilon} \xi \eta, \tau_{st}^2 = 1, (\xi, \eta, \chi) \neq (+, +, +) \text{ oder } \tau_s^2 = (-1)^{2\epsilon},$$

$$\tau_t^2 = -(-1)^{2\epsilon}, \tau_{st}^2 = -1, \xi = \eta = \chi = +: (\tau_s \underline{U}_g(I_s))^{\nu} \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_s \underline{U}_g(I_s))^{\nu-1} =$$

$$= \tau_s \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} P_{ba}^g (D_{\alpha\beta}^{(\hat{a}\epsilon)} (\hat{a}1 \tilde{\partial}/\mu) \phi_{\beta,b}^g(f_s),$$

$$(\tau_t \underline{U}_g(I_t))^{\nu} \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_t \underline{U}_g(I_t))^{\nu-1} =$$

$$= \tau_t \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} T_{ba}^g (D_{\alpha\beta}^{(\hat{a}\epsilon)} (-i \hat{a}1 \tilde{\partial}/\mu) \phi_{\beta,b}^g(f_t^*),$$

$$(\tau_{st} \underline{U}_g(I_{st}))^{\nu} \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_{st} \underline{U}_g(I_{st}))^{\nu-1} =$$

$$= \tau_{st} \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} R_{ba}^g D_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(-\Gamma) \phi_{\beta,b}^g(f_{st}^*);$$

(c) für $g \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_4$, $\tau_s^2 = \xi(-1)^{2\epsilon}$, $\tau_t^2 = \xi\eta$, $\tau_{st}^2 = \eta(-1)^{2\epsilon}$:

$$\begin{aligned} & (\tau_{\underline{s}} \underline{U}_g(I_s))^\vee \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_{\underline{s}} \underline{U}_g(I_s))^\vee{}^{-1} = \\ & = \xi \tau_s \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} T_{ba}^g D_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(-\Gamma) \phi_{\beta,b}^g(f_s), \\ & (\tau_{\underline{t}} \underline{U}_g(I_t))^\vee \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_{\underline{t}} \underline{U}_g(I_t))^\vee{}^{-1} = \\ & = \tau_t \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} T_{ba}^g D_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(-\Gamma) \phi_{\beta,b}^g(f_t^*), \\ & (\tau_{\underline{st}} \underline{U}_g(I_{st}))^\vee \phi_{\alpha,a}^g(f) (\tau_{\underline{st}} \underline{U}_g(I_{st}))^\vee{}^{-1} = \tau_{st} (-1)^{2\epsilon} \phi_{\alpha,a}^g(f_{st}^*); \\ & \text{dabei gilt die letzte Gleichung für alle } g \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

(d) für $(\xi, \eta, \chi) \neq (+, +, +)$, $\eta = (-1)^{2\epsilon}$ oder $(\xi, \eta, \chi) = (+, +, +)$, $(-1)^{2\epsilon+1} = 1$:

$$\phi_{\alpha,a}^g(f) = \sum_{b=1}^{N_g} \sum_{\beta=1}^{2\epsilon+1} R_{ba}^g D_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(\Gamma) \phi_{\beta,b}^g(f);$$

(e) für $g \in \mathcal{R}_2$, $\tau_s^2 = \xi(-1)^{2\epsilon}$, $\tau_t^2 = \xi\eta$, $\tau_{st}^2 = \eta(-1)^{2\epsilon}$, $\alpha' \in \{1, \dots, 2(2\epsilon+1)\}$:

$$\begin{aligned} & (\tau_{\underline{s}} \underline{U}_g(I_s))^\vee \psi_{\alpha',a}^g(f) (\tau_{\underline{s}} \underline{U}_g(I_s))^\vee{}^{-1} = \\ & = \tau_s \xi \eta^{a-1} \sum_{\beta=1}^{2(2\epsilon+1)} \begin{pmatrix} 0 & D^{(\epsilon)}(\Gamma) \\ D^{(\epsilon)}(-\Gamma) & 0 \end{pmatrix}_{\alpha'\beta} \overline{\psi}_{\beta,a}^g(f_s) \\ & (\tau_{\underline{t}} \underline{U}_g(I_t))^\vee \psi_{\alpha',a}^g(f) (\tau_{\underline{t}} \underline{U}_g(I_t))^\vee{}^{-1} = \\ & = \tau_t \eta^{a-1} \sum_{\beta=1}^{2(2\epsilon+1)} \begin{pmatrix} D^{(\epsilon)}(-\Gamma) & 0 \\ 0 & D^{(\epsilon)}(-\Gamma) \end{pmatrix}_{\alpha'\beta} \psi_{\beta,a}^g(f_t^*), \\ & (\tau_{\underline{st}} \underline{U}_g(I_{st}))^\vee \psi_{\alpha',a}^g(f) (\tau_{\underline{st}} \underline{U}_g(I_{st}))^\vee{}^{-1} = \\ & = \tau_{st} \sum_{\beta=1}^{2(2\epsilon+1)} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{2\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha'\beta} \overline{\psi}_{\beta,a}^g(f_{st}^*). \end{aligned}$$

Beweis: (a), (b): Sei $\mathcal{T}_{\beta,b}$ erklärt wie im Beweis von (5.36) und sei für alle $i \in \{s, t, st\}$ $\lambda_i := 1$ bzw. -1 je nachdem ob $\underline{U}_g(I_i)$ mit $\underline{U}_g(I_{st})$ vertauscht bzw. antivertauscht. Dann gilt: $(\tau_{\underline{1}} \underline{U}(I_1))^\vee \phi_{\alpha,a}(f)$

$$\begin{aligned} & (\tau_{\underline{1}} \underline{U}(I_1))^\vee{}^{-1} = \sqrt{\pi} (c^+(\tau_{\underline{1}} \underline{U}(I_1) \underline{U}(\Gamma) \iota_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu\{f\}_{f_{st}}) + c(\tau_{\underline{1}} \underline{U}(I_1) \underline{U}(-\Gamma, I_{st}) \\ & \iota_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu\{f\})) = \tau_{\underline{1}} \sqrt{\pi} \sum_{\beta,b} (c^+(\underline{U}(\Gamma) \iota_{\beta,b} \mathcal{T}_{\beta,b} \underline{U}(I_1) (\iota_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu\{f\}_{f_{st}}) + \\ & + \lambda_1 \tau_1^{-2} c(\underline{U}(-\Gamma, I_{st}) \iota_{\beta,b} \mathcal{T}_{\beta,b} \underline{U}(I_1) \iota_{\alpha,a} \mathcal{F}_\mu\{f\})). \text{ Für } \lambda_1 \text{ findet man:} \end{aligned}$$

$\lambda_s = \lambda_t = \xi\eta$, $\lambda_{st} = 1$. Die weitere Rechnung führen wir nur für die zweite

Gleichung aus (b) durch: $(\pi_{\beta, b} \underline{U}(I_t) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f)(p) =$
 $= T_{ba} D_{\beta\alpha}^{(\hat{a}\epsilon)} (\tilde{p}/\mu) (\{I_s\} \{K\} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f)(p) = T_{ba} D_{\beta\alpha}^{(\hat{a}\epsilon)} (\tilde{p}/\mu) (\mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f_t^*)(p) =$
 $= T_{ba} \mathcal{F}_{\mu}(D^{(\hat{a}\epsilon)} (-i\hat{a}\tilde{\partial}\Gamma/\mu) \{\Gamma\} f_t^*)(p) = T_{ba} (\mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} D^{(\hat{a}\epsilon)} (i\hat{a}\Gamma\partial) f_t^*)(p)$. Somit:
 $\pi_{\beta, b} \underline{U}(I_t) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f = (-1)^{2\epsilon} T_{ba} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} D^{(\hat{a}\epsilon)} (-i\hat{a}\Gamma\partial) f_t^*, \pi_{\beta, b} \underline{U}(I_t) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f_{st} =$
 $= T_{ba} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} (D^{(\hat{a}\epsilon)} (-i\hat{a}\Gamma\partial) f_t^*)_{st}$. Damit folgt durch Einsetzen die Behauptung.

(c): Wir bewisen zunächst die dritte Gleichung (kurz (c.3)):
 $(\tau_{st} \underline{U}(I_{st}))^\vee \phi_{\alpha, a}(f) (\tau_{st} \underline{U}(I_{st}))^{\vee-1} = \sqrt{\pi} c^+ (\tau_{st} \underline{U}(\Gamma, I_{st}) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f_{st}) +$
 $+ c (\tau_{st} \underline{U}(I_{st}) \underline{U}(-\Gamma, I_{st}) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f) = \sqrt{\pi} \tau_{st} ((-1)^{2\epsilon} c^+ (\underline{U}(-\Gamma, I_{st}) \iota_{\alpha, a}$
 $\mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f_{st}) + \tau_{st}^{-2} c (\underline{U}(\Gamma) \iota_{\alpha, a} \mathcal{F}_{\mu} \{\Gamma\} f) = \tau_{st} (-1)^{2\epsilon} (\phi_{\alpha, a}(f_{st}))^+ =$
 $= \tau_{st} (-1)^{2\epsilon} \phi_{\alpha, a}^+(f_{st}^*)$. (c.2) ist identisch mit (a.2). (c.1) folgt aus
(c.2) und (c.3) mit $\underline{U}(I_s) = \xi (-1)^{2\epsilon} \underline{U}(I_{st}) \underline{U}(I_t)$ und $\tau_s = \pm \tau_{st} \tau_t^*$.

(d) folgt sofort durch Kombination von (c.3) mit (a.3) bzw. (b.3).

(e) folgt sofort aus (c) und der Definition von Ψ^S und $\overline{\Psi}^S$ in (5.45). ■

Wir untersuchen nun ob die "Verdopplung" des Hilbertraumes, die bei den meisten PISden von $\tilde{\mathcal{P}}$ gegenüber denjenigen von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ auftritt, als Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen interpretiert werden kann. Dazu konstruieren wir in einem noch zu präzisierenden Rahmen alle Ladungsoperatoren und die zugehörigen Ladungskonjugationsoperatoren. Welche davon die gebräuchlichen Ladungskonjugationsoperatoren für die üblichen freien Felder sind, wird in 5.6. untersucht.

Anstatt von Teilchen und Antiteilchen können wir auch von einem Teilchen sprechen, das zweier Zustände fähig ist, die in Masse und Spin (d.h. für Masse Null im Absolutwert der Helizität) übereinstimmen, sich aber durch eine verallgemeinerte Ladung mit Werten +1 und -1 (für Einteilchenzustände) unterscheiden. Um definierte Transformationseigenschaften der Zustände unter Inversionen zu erhalten, gehen wir von einer PSD $\tilde{U}$ von $\tilde{\mathcal{P}}$ im Einteilchenraum aus; deren Einschränkung auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ muß die Ladung invariant lassen, so daß $\tilde{U}$ im Sinn von (5.12) verdoppelt ist. Nach (5.13) gibt es dann ein $g \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2$ derart, daß $\tilde{U}$ unitäräquivalent ist zu einer PSD, die von $\underline{U}_g$ erzeugt wird. Nun werden in einer Theorie, für die $\tilde{\mathcal{P}}$ eine Symmetriegruppe ist, nur solche Unterräume des Zustandsraums physikalisch relevanten Eigenschaften entsprechen, die auch unter Inversionen ein ausge-

zeichnetes Transformationsverhalten haben. Deshalb betrachten wir nur solche Paare von Unterräumen, die unter Inversionen entweder invariant sind oder permutiert werden. Das führt zu folgender Definition eines Ladungsoperators:

(5.47) Def: Seien $\tilde{U}: \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H)$ eine verdoppelte PSD von $\tilde{\mathcal{F}}$, U eine Version von $\tilde{U}$ und P_+ , P_- nichttriviale Projektoren auf H mit $P_+ + P_- = 1_H$. Dann nennen wir

- (a) den Operator $Q := P_+ - P_- = 2P_+ - 1_H$ einen Ladungsoperator bzgl. $\tilde{U}$ (oder U), wenn gilt:
 - (1) $\forall g \in \tilde{\mathcal{F}}_0 \quad (U(g)QU(g)^{-1} = Q),$
 - (2) $\forall i \in \{s, t, st\} \quad (U(I_i)QU(I_i)^{-1} = \varepsilon_i Q, \varepsilon_i \in \{+1, -1\});$
- (b) einen unitären Operator C auf H eine Ladungskonjugation bzgl. Q , wenn gilt:
 - (3) $\forall g \in \tilde{\mathcal{F}}_0 \quad (U(g)CU(g)^{-1} = C),$
 - (4) $CQC^{-1} = -Q;$
- (c) die Gruppe unitärer Operatoren $\{e^{irQ} = e^{irP_+} + e^{-irP_-} \mid r \in \mathbb{R}\}$ die zu Q gehörige Eichgruppe.

Für jede der Darstellungen $\underline{U}_\xi, \xi \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2$, aus (5.11) gibt es offensichtlich den Ladungsoperator $(Q\psi)_a(p) = \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p)$; alle Ladungsoperatoren und die zugehörigen Ladungskonjugationen liefert der folgende Satz.

(5.48) Satz: Sei $\xi \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2$. Dann gilt:

- (a) für jeden Ladungsoperator Q bzgl. $\underline{U}_\xi$ gibt es $q \in [-1, 1]$ und $\omega \in \mathbb{C}_1$ derart, daß gilt:

$$(1) (Q\psi)_a(p) = \sum_{b=1}^2 \left(\frac{q}{\sqrt{1-q^2} \omega^* \theta(\mu)_D(\xi)} (\tilde{p}/\mu) \sqrt{1-q^2} \omega \theta(\mu)_D(\xi) \begin{pmatrix} p/\mu \\ -q \end{pmatrix} \right)_{ab} \psi_b(p).$$

Alle Werte von q und ω , die für den jeweiligen Wert von ξ nach (1) einen Ladungsoperator bzgl. $\underline{U}_\xi$ liefern, sind zusammen mit den zugehörigen Werten $(\varepsilon_i)_{i \in \{s, t, st\}}$ aus (5.47) gegeben durch:

$\xi \in \mathcal{R}_2, \eta = 1, \mu > 0$ oder $(\mu, \xi) = (0, 0),$

$$q = 0, \omega \in \{1, -1\}, \quad \varepsilon_s = 1, \varepsilon_t = 1, \varepsilon_{st} = 1,$$

$$q \in \{1, -1\}, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = -1, \varepsilon_t = 1, \varepsilon_{st} = -1,$$

$$q = 0, \omega \in \{i, -i\}, \quad \varepsilon_s = -1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_{st} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 & \xi \in \mathcal{R}_2, \eta = -1, \mu > 0 \text{ oder } (\mu, \xi) = (0, 0), \\
 & q = 0, \omega \in \{1, -1\}, \quad \varepsilon_s = 1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_{st} = -1, \\
 & q \in \{1, -1\}, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = -1, \varepsilon_t = 1, \varepsilon_{st} = -1, \\
 & \xi \in \mathcal{R}_2, \mu = 0, \delta > 0, \\
 & q \in \{1, -1\}, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = -1, \varepsilon_t = 1, \varepsilon_{st} = -1, \\
 & \xi \in \mathcal{R}_2', (\xi, \eta, \chi) = (+, +, +), \\
 & q = 0, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = 1, \varepsilon_t = 1, \varepsilon_{st} = 1, \\
 & q \in \{1, -1\}, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = 1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_{st} = -1, \\
 & \xi \in \mathcal{R}_2', (\xi, \eta) = (-, +) \\
 & q \in \{1, -1\}, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = 1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_{st} = -1, \\
 & q = 0, \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = -1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_{st} = 1, \\
 & \xi \in \mathcal{R}_2', (\xi, \eta) = (-, -) \\
 & q \in [1, -1], \omega \in \mathbb{C}_1, \quad \varepsilon_s = 1, \varepsilon_t = -1, \varepsilon_{st} = -1.
 \end{aligned}$$

(b) Für jedes Q aus (1) gilt mit dem unitären Operator

$$(2) (A\psi)_a(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} \sqrt{1+q} & \omega\sqrt{1-q}\theta(\mu)D^{(\xi)}(\tilde{p}/\mu) \\ -\omega^*\sqrt{1-q}\theta(\mu)D^{(\xi)}(\tilde{p}/\mu) & \sqrt{1+q} \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p)$$

$$(3) (AQA^{-1}\psi)_a(p) = \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p).$$

(c) Für die Ladungsoperatoren bzgl. $\underline{U}_3$ mit $\mu=0, \delta>0$ gibt es keine Ladungskonjugation. Für die anderen Ladungsoperatoren aus (a) sind alle Ladungskonjugationen gegeben durch:

$$(4) (C\psi)_a(p) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} -\sqrt{1-q^2}(\omega\gamma + \omega^*\delta) & (\delta - \omega^2\gamma + q(\delta + \omega^2\gamma))D^{(\xi)}(\tilde{p}/\mu) \\ (\gamma - \omega^*\delta + q(\gamma + \omega^*\delta))D^{(\xi)}(\tilde{p}/\mu) & \sqrt{1-q^2}(\omega\gamma + \omega^*\delta) \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p)$$

$\gamma, \delta \in \mathbb{C}_1$

Beweis: Aus (5.47.1) folgt mit dem Schurschen Lemma und der Gleichung (1) aus dem Beweis von (5.11) für jeden Ladungsoperator die Gestalt (1) und für $\mu=0, \delta>0$ zudem $q \in \{1, -1\}$. (5.47.2) liefert dann die in (a) aufgeführten Lösungen für q, ω und ε_1 durch triviale Rechnung. Für die Ladungskonjugationen folgt aus (5.47.3) daß sie durch eine numerische Matrix analog zu (1) beschrieben werden. Für $\mu=0, \delta>0$ gibt es dann keine simultane Lösung von (5.47.3. u. 4.). In den anderen Fällen findet man die Ladungskonjugation für den Fall $q=1$

$$\text{leicht als } (C\psi)_a(p) = \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & \delta D^{(\xi)}(\tilde{p}/\mu) \\ \gamma D^{(\xi)}(\tilde{p}/\mu) & 0 \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p), \quad \gamma, \delta \in \mathbb{C}_1, \text{ und}$$

durch unitäre Transformation mit (2) die allgemeine Lösung (4). ■

(5.49) Bem: Aus (5.48) folgt sofort: Jeder Ladungsoperator bzgl. einer verdoppelten Darstellung, die zu Masse Null und nicht verschwindender Helizität gehört, ist unter Zeitinversion invariant und ändert das Vorzeichen unter Raum- und totaler Inversion. Für positive Masse und für $(\mu, \xi) = (0, 0)$ gibt es Ladungsoperatoren mit diesem Transformationsverhalten unter Inversionen genau für die Darstellungen $\underline{U}_{\mu, \xi}^{(+, +, -)}$ und $\underline{U}_{\mu, \xi}^{(+, -, -)}$ diese Ladungsoperatoren sind bis auf Vorzeichenwillkür von der Form (5.48.1) mit $q=1$.

Wird der Ladungsoperator nicht, wie in den in (5.49) ausgezeichneten Fällen, durch eine Diagonalmatrix beschrieben, so ist diejenige Zerlegung des Hilbertraums, die für die Angabe der Darstellungen $\underline{U}_g$ in (5.11) verwendet wurde, unnatürlich, da sie keiner Zerlegung in Zustände verschiedener Ladung entspricht. Eine angepaßte Zerlegung erhält man durch eine unitäre Transformation $\underline{U}_g \mapsto A \underline{U}_g A^{-1}$, wobei A der für den zu diagonalisierenden Ladungsoperator in (5.48.2) definierte Operator ist.

Wir betrachten nun die Wirkung der Eichgruppen und der Ladungskonjugation auf die Feldoperatoren; dabei beschränken wir uns auf Ladungsoperatoren Q der kanonischen Form, d.h.

$$(5.50) \quad (Q\psi)_a(p) := \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p).$$

Da R^g für alle $g \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2$ eine Schiefdiagonalmatrix ist, erzeugt $\phi_{\alpha, 1}^g(f)$ Zustände der Ladung $+1$ und vernichtet solche der Ladung -1 , während für $\phi_{\alpha, 2}^g(f)$ entsprechendes mit vertauschtem Ladungsvorzeichen gilt. Man findet leicht folgenden, bei einem anderen Zugang häufig als Definition des Ladungsoperators betrachteten, Zusammenhang

$$(5.51) \quad (e^{irQ})^\vee \phi_{\alpha, a}^g(f) (e^{-irQ})^\vee = e^{ir} \phi_{\alpha, a}^g(f), \quad r \in \mathbb{R},$$

wonach der Ladungsoperator der Generator einer Gruppe von Eichtransformationen ist. Jede Ladungskonjugation bzgl. Q aus (5.50) ist nach (5.48.4) wegen $q=1$ von der Form:

$$(5.52) \quad (C\psi)_a(p) = \sum_{b=1}^2 c_{ab} D^{(\hat{b}\hat{g})}(\hat{p}/\mu) \psi_b(p),$$

wobei (c_{ab}) eine 2×2 -Schiefdiagonalmatrix mit Matrixelementen aus $\mathbb{C}_1$ ist. Eine mit (5.35') geradlinige Rechnung liefert:

$$(5.53) \quad \check{C} \phi_{\alpha,a}^g(f) \check{C}^{-1} = \sum_{b=1}^2 \sum_{\beta=1}^{2g+1} D_{\alpha\beta}^{(\hat{a}g)}(i\hat{a}\partial/\mu) ((-1)^{2g} C_{ba} \phi_{\beta,b}^g(-) + C_{ab}^* \phi_{\beta,b}^g(+))(f).$$

Damit sich das ladungskonjugierte Feld wieder durch das ursprüngliche Feld, und nicht nur durch dessen Erzeugungs- und Vernichtungsanteile getrennt, ausdrücken läßt, müssen also die Zahlen C_{ab} speziell gewählt werden. Näheres sagt der folgende Satz.

(5.54) Satz: Seien $g \in \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}'_2, \mu > 0$ oder $(\mu, g) = (0, 0), Q: \underline{H}_g \longrightarrow \underline{H}_g$ aus (5.50), $C: \underline{H}_g \longrightarrow \underline{H}_g$ aus (5.52) mit $C_{12} = 1, C_{21} = (-1)^{2g}$ und

$$\tau_c := \begin{cases} 1 & \text{für } (\xi, \eta, \chi) \neq (+, +, +), \eta(-1)^{2g} = 1 \text{ oder } \xi = \eta = \chi = +, (-1)^{2g} = -1 \\ i & \text{für } (\xi, \eta, \chi) \neq (+, +, +), \eta(-1)^{2g} = -1 \text{ oder } \xi = \eta = \chi = +, (-1)^{2g} = 1 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \check{C} \phi_{\alpha,1}^g(f) \check{C}^{-1} = \sum_{\beta=1}^{2g+1} (D_{\alpha\beta}^{(g)}(i\partial/\mu) \phi_{\beta,2}^g(f), \\ (2) \quad & \check{C} \phi_{\alpha,2}^g(f) \check{C}^{-1} = \sum_{\beta=1}^{2g+1} (D_{\alpha\beta}^{(g)}(-i\tilde{\partial}/\mu) \phi_{\beta,1}^g(f), \\ (3) \quad & (\tau_c C)^\vee \psi_{\alpha,1}^g(f) (\tau_c C)^{\vee-1} = \tau_c R_{21}^{g*} \sum_{\beta=1}^{2(2g+1)} \begin{pmatrix} D^{(g)}(\Gamma) & 0 \\ 0 & D^{(g)}(-\Gamma) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \overline{\psi}_{\beta,1}^g(f), \\ (4) \quad & (\tau_c C)^\vee \psi_{\alpha,2}^g(f) (\tau_c C)^{\vee-1} = \tau_c R_{12}^{g*} \sum_{\beta=1}^{2(2g+1)} \begin{pmatrix} D^{(g)}(-\Gamma) & 0 \\ 0 & D^{(g)}(\Gamma) \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \overline{\psi}_{\beta,2}^g(f). \end{aligned}$$

Beweis: (1), (2) sind eine triviale Folge aus (5.53). (3), (4): Mit $\mu := 1$ bzw. $\mu := i$ je nachdem ob $(\xi, \eta, \chi) \neq (+, +, +)$ oder $\xi = \eta = \chi = +$ und $a := 2$ bzw. $a := 1$ je nachdem ob $a = 1$ oder $a = 2$, gilt nach (5.46.a-b):

$$(1') \quad (\mu U_{\mathcal{I}_{st}})^\vee \phi_{\alpha,a}(f) (\mu U_{\mathcal{I}_{st}})^{\vee-1} = R_{a\mathcal{I}}^g \sum_{\beta=1}^{2g+1} D^{(g)}(-\Gamma) \phi_{\beta,\mathcal{I}}^g(f_{st}^*).$$

Weiter gilt mit $\nu := 1$ bzw. $\nu := i$ je nachdem ob $\eta(-1)^{2g} = 1$ oder $\eta(-1)^{2g} = -1$:

$$(2') \quad (\nu U_{\mathcal{I}_{st}})^\vee \phi_{\alpha,a}(f) (\nu U_{\mathcal{I}_{st}})^{\vee-1} = (-1)^{2g} \phi_{\alpha,a}^+(f_{st}).$$

Wegen $\nu\mu^* = \pm \tau_c$ folgt durch Kombination von (1') und (2'):

$$(3') \quad \check{C} \phi_{\alpha,a}(f) \check{C}^{-1} = (-1)^{2g} \tau_c R_{a\mathcal{I}}^{g*} D_{\alpha\beta}^{(g)}(\Gamma) \phi_{\beta,\mathcal{I}}^+(f).$$

Mit (1), (2), (3') sind nun (3), (4) geradlinig auszurechnen, was wir für (4) mit $1 \leq \alpha \leq 2g+1$ vorführen:

$$\begin{aligned} & (\tau_c C)^\vee \psi_{\alpha,2}(f) (\tau_c C)^{\vee-1} = (\tau_c C)^\vee \phi_{\alpha,2}(f) (\tau_c C)^{\vee-1} \quad (2) \\ & = \tau_c \sum_{\beta} \phi_{\beta,1} (D_{\alpha\beta}^{(g)}(i\tilde{\partial}/\mu) f) \tau_c^{-1} \quad (2') \quad (-1)^{2g} \tau_c R_{12}^{g*} \sum_{\beta,\mathcal{I}} D_{\beta\mathcal{I}}^{(g)}(\Gamma) \phi_{\mathcal{I},2}^+ \\ & (D_{\alpha\beta}^{(g)}(i\tilde{\partial}/\mu) f) = \tau_c R_{12}^{g*} \sum_{\beta,\mathcal{I}} D^{(g)}(\Gamma) \phi_{\mathcal{I},2}^+ (D_{\beta\mathcal{I}}^{(g)}(-i\Gamma^{-1}\tilde{\partial}/\mu) f) = \end{aligned}$$

$$= \tau_c R_{12}^{\otimes*} \sum_{\gamma, \lambda} D_{\alpha, \lambda}^{(\otimes)}(-\Gamma) \phi_{\gamma, 2}^+ (D_{\gamma, \lambda}^{(\otimes)}(i\partial/\mu)f) = \tau_c R_{12}^{\otimes*} \sum_{\lambda} D_{\alpha, \lambda}^{(\otimes)}(-\Gamma) \bar{\psi}_{\lambda, 2}(f).$$

5.6. Spezielle Felder für Spin 0 und Spin 1/2.

Wir betrachten den in 5.3. - 5.5. entwickelten Formalismus nun für spezielle Darstellungen von $\tilde{\mathcal{P}}$. Dabei beschränken wir uns einerseits auf die beiden niedrigsten Spinwerte und andererseits auf solche Darstellungen und Felder, die folgende Forderungen erfüllen:

- (5.55) (a) Bosfelder sollen zu MDen mit trivialem Multiplikator gehören.
 (b) Felder, die Teilchen und Antiteilchen beschreiben, sollen zu solchen verdoppelten Darstellungen von $\tilde{\mathcal{P}}$ gehören, für die es einen Ladungsoperator gibt, der unter Zeitinversion invariant ist und unter totaler Inversion das Vorzeichen ändert (s.(5.49)).

Daß die Forderung (a) physikalisch sinnvoll ist, wird in 6.3. gezeigt. Um die Berechtigung von (b) zu zeigen, geben wir nun Felder an, die sowohl (b) erfüllen als auch den üblichen Relationen des Klein-Gordon-Feldes bzw. des Diracfeldes bzw. des Weylfeldes genügen.

Das hermitesche Klein-Gordon-Feld.

Wir betrachten die Darstellungen $U := \underline{U}_{\rho, \sigma} = \begin{pmatrix} +, + \\ \mu, 0 \end{pmatrix}$, $\mu \geq 0$; das sind alle unverdoppelten Darstellungen zu Spin Null und ihr Multiplikator ist nach (5.11.b) trivial. Das zugehörige Feld $\phi := \phi_{\{1\}}^{\rho}$ aus (5.41) ist einkomponentig. Seine Eigenschaften erhalten wir durch Spezialisierung von (5.36), (5.40), (5.46.d), (5.46.b):

(5.56) Für alle $(a, A) \in \mathcal{P}_0$, $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt:

$$\begin{aligned} \check{U}(a, A) \phi(f) \check{U}(a, A)^{-1} &= \phi(\{a, A\}f), \\ [\phi(f), \phi(g)] &= i\Delta_{\mu}(f * g_{st}), \quad \phi^+(f) = \phi(f), \\ (\tau_s U(I_s))^{\vee} \phi(f) (\tau_s U(I_s))^{\vee-1} &= \tau_s \phi(f_s), \quad \tau_s \in \{1, -1\}, \\ (\tau_t U(I_t))^{\vee} \phi(f) (\tau_t U(I_t))^{\vee-1} &= \tau_t \phi(f_t), \quad \tau_t \in \{1, -1\}, \\ (\tau_{st} U(I_{st}))^{\vee} \phi(f) (\tau_{st} U(I_{st}))^{\vee-1} &= \tau_{st} \phi(f_{st}) \quad \tau_{st} \in \{1, -1\}. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang mit den in der Literatur dominierenden formalen Operatoren $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^4$, wird hergestellt durch die formale Beziehung: $\phi(f) = \int d^4x f(x) \phi(x)$. Als Beispiel übertragen wir die zweite und die fünfte der Gleichungen (5.56) in die formale Schreibweise:

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x d^4y f(x) g(y) [\Phi(x), \Phi(y)] = [\Phi(f), \Phi(g)] = i \Delta_\mu(f * g_{st}) = \\
 & = i \int d^4z (f * g_{st})(z) \Delta_\mu(z) = i \int d^4z d^4x f(x) g(x-z) \Delta_\mu(z) = \\
 & = i \int d^4x d^4y f(x) g(y) \Delta_\mu(x-y) \Rightarrow [\Phi(x), \Phi(y)] = i \Delta_\mu(x-y); \\
 & \int d^4x f^*(x) \check{U}(I_t) \Phi(x) \check{U}(I_t)^{-1} = \check{U}(I_t) \Phi(f) \check{U}(I_t)^{-1} = \Phi(f_t^*) = \\
 & = \int d^4x f^*(I_t x) \Phi(x) = \int d^4x f^*(x) \Phi(I_t x) \Rightarrow \check{U}(I_t) \Phi(x) \check{U}(I_t)^{-1} = \Phi(I_t x). \\
 & \text{Damit können wir (5.56) mit der Standardliteratur, z.B. SCHWEBER [28],} \\
 & \text{vergleichen und finden völlige Übereinstimmung mit den üblichen Re-} \\
 & \text{lationen für das hermitesche Skalarfeld [28; p. 173, (109), (110);} \\
 & \text{p. 177, (145); p. 173 (116); p. 176, (133)].}
 \end{aligned}$$

Das "geladene" Klein-Gordon-Feld.

Wir betrachten die Darstellungen $U := \underline{U}_g$, $g = \begin{pmatrix} +, +, - \\ \mu, 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_2, \mu \geq 0$, von $\tilde{\mathcal{P}}$ aus (5.11.a); das sind alle verdoppelten Darstellungen zu Spin Null, die (5.55.b) erfüllen, und ihr Multiplikator ist nach (5.11.b) trivial. Nach (5.41) gehören zu U zwei einkomponentige Felder $\Phi_{\{1\}}^g$, $\Phi_{\{2\}}^g$ und ein zweikomponentiges Feld $\Phi_{\{1,2\}}^g$. Der durch (5.55.b) ausgezeichnete Ladungsoperator auf $\underline{H}_g$ ist gegeben durch $(Q\psi)_a(p) =$

$$\begin{aligned}
 & = \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p). \text{ Die einfachste zugehörige Ladungskonjugation ist} \\
 & \text{nach (5.52) } (C\psi)_a(p) = \sum_{b=1}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{ab} \psi_b(p). \text{ Damit und wegen (5.54.1) und} \\
 & \text{(5.46.d) gilt für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4):
 \end{aligned}$$

$$(5.57) \quad \phi_2(f) = \check{C} \phi_1(f) \check{C}^{-1} = \phi_1^+(f).$$

Es genügt daher Vertauschungsregeln und Transformationsverhalten für die Komponenten $\Phi(f) := \Phi_1(f)$ anzugeben: Aus (5.36), (5.40), (5.46.c) folgt:

$$\begin{aligned}
 (5.58) \quad & \text{Für alle } (a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_0, f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \text{ gilt:} \\
 & \check{U}(a, A) \Phi(f) \check{U}(a, A)^{-1} = \Phi(\{a, A\}f) \\
 & [\Phi(f), \Phi(g)] = [\Phi^+(f), \Phi^+(g)] = 0, \quad [\Phi(f), \Phi^+(g)] = i \Delta_\mu(f * g_{st}), \\
 & (\tau_s^U(I_s))^V \Phi(f) (\tau_s^U(I_s))^V{}^{-1} = \tau_s \Phi^+(f_s), \quad \tau_s \in \{1, -1\}, \\
 & (\tau_t^U(I_t))^V \Phi(f) (\tau_t^U(I_t))^V{}^{-1} = \tau_t \Phi(f_t^*), \quad \tau_t \in \{1, -1\}, \\
 & (\tau_{st}^U(I_{st}))^V \Phi(f) (\tau_{st}^U(I_{st}))^V{}^{-1} = \tau_{st} \Phi^+(f_{st}^*), \quad \tau_{st} \in \{1, -1\}.
 \end{aligned}$$

Wir vergleichen nun dieses Transformationsverhalten mit dem des geladenen Skalarfeldes in [28]: Für alle $\eta_s, \eta_t, \eta_c \in \mathbb{C}_1$ gibt es nach [28] Operatoren $U(i_s), U(i_t), U_c$ (s. [28; p.203, (312a); p. 205, (321a); p. 206, (332a)]) - die üblichen Operatoren der Rauminverson, Zeitin-

version und Ladungskonjugation - für die gilt:

$$\begin{aligned}(5.59) \quad U(i_s) \phi(f) U(i_s)^{-1} &= \eta_s \phi(f_s), \\ U(i_t) \phi(f) U(i_t)^{-1} &= \eta_t \phi(f_t^*), \\ U_c \phi(f) U_c^{-1} &= \eta_c \phi^+(f).\end{aligned}$$

Wählt man darin $\eta_s, \eta_t \in \{1, -1\}$, $\eta_c = 1$, so stimmen Zeitinversion und Ladungskonjugation mit unseren Inversionsoperatoren in der Wirkung auf das Feld überein, während unsere Raum inversion nicht die übliche Raum inversion ist, sondern deren Produkt mit der Ladungskonjugation. In (5.58) ist die Wahl der Phasenfaktoren gegenüber (5.59) stark eingeschränkt. Das führt daher, daß wir nur solche Inversionsoperatoren betrachten, die aus Operatoren im Einteilchenraum durch die kanonische Operation "v" (s. (5.24)) hervorgehen, was bei [28] nicht gefordert ist.

Zweikomponentige Spin-1/2-Felder (Felder von THEIS und von WEYL).

Wir betrachten die Darstellungen $\underline{U}_{S_1}$ und $\underline{U}_{S_2}$ mit $S_1 = \begin{pmatrix} +, +, - \\ \mu, 1/2 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} +, - \\ \mu, 1/2 \end{pmatrix}$, $\mu \geq 0$; das sind alle verdoppelten Darstellungen zu Spin 1/2, die (5.55.b) erfüllen. Wegen $S_1, S_2 \in \mathcal{R}_2$ und nach (5.41) gehören zu $\underline{U}_{S_1}$ bzw. $\underline{U}_{S_2}$ zwei 2-komponentige Felder ϕ^1, ϕ^2 bzw. ϕ^3, ϕ^4 und zu $\underline{U}_{S_2}$ noch ein 4-komponentiges Feld ϕ^5 , die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}(5.60) \quad \phi^1: f \mapsto (\phi_{\alpha,1}^{S_1}(f))_{\alpha \in \{1,2\}}, \quad \phi^2: f \mapsto (\phi_{\alpha,2}^{S_1}(f))_{\alpha \in \{1,2\}}, \\ \phi^3: f \mapsto (\phi_{\alpha,1}^{S_2}(f))_{\alpha \in \{1,2\}}, \quad \phi^4: f \mapsto (\phi_{\alpha,2}^{S_2}(f))_{\alpha \in \{1,2\}}, \\ \phi^5: f \mapsto (\phi_{\alpha,a}^{S_2}(f))_{\alpha \in \{1,2\}, a \in \{1,2\}}.\end{aligned}$$

Wir betrachten hier nur die 2-komponentigen Felder und lassen die "zufällige" Tatsache unberücksichtigt, daß die Feldoperatoren von ϕ^3 mit denen von ϕ^4 mikrokausale Antivertauschungsrelationen erfüllen und daher als Komponenten ein und desselben Feldes ϕ^5 aufgefaßt werden können. Vertauschungsrelationen und Transformationsverhalten der Felder ϕ^i , $i \in \{1,2,3,4\}$ erhalten wir aus (5.40), (5.36) (5.46.c) unter Berücksichtigung von:

$$\begin{aligned}(5.61) \quad \forall A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}), a \in \mathbb{C} \quad D^{(1/2)}(A) = A, \quad D^{(-1/2)}(A) = (A^*)^{-1}, \\ D^{(1/2)}(a\partial) = D^{(-1/2)}(a^*\tilde{\partial}) = a\partial, \quad D^{(1/2)}(a\tilde{\partial}) = D^{(-1/2)}(a^*\partial) = a\tilde{\partial}.\end{aligned}$$

Wir geben sie nochmals explizit an:

(5.62) Seien $(a, A) \in \widetilde{\mathcal{P}}_0$, $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$, $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1$ bzw. $:= \mathcal{S}_2$ je nachdem ob $k \in \{1, 2\}$ oder $k \in \{3, 4\}$. Dann gilt:

$$\check{U}_{\mathcal{S}}(a, A) \phi_{\alpha}^k(f) \check{U}_{\mathcal{S}}(a, A)^{-1} = \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^2 A_{\alpha\lambda}^{-1} \phi_{\lambda}^k(\{a, A\}f) & \text{für } k \in \{1, 3\} \\ \sum_{\lambda=1}^2 A_{\alpha\lambda}^{+} \phi_{\lambda}^k(\{a, A\}f) & \text{für } k \in \{2, 4\}, \end{cases}$$

$$[\phi_{\alpha}^k(f), \phi_{\beta}^k(g)]_{+} = [\phi_{\alpha}^{k+}(f), \phi_{\beta}^{k+}(g)]_{+} = 0,$$

$$[\phi_{\alpha}^k(f), \phi_{\beta}^{k+}(g)]_{+} = \begin{cases} -((\mathcal{Q})_{\alpha\beta} \Delta_{\mu})(f * g_{st}) & \text{für } k \in \{1, 3\} \\ -((\tilde{\mathcal{Q}})_{\alpha\beta} \Delta_{\mu})(f * g_{st}) & \text{für } k \in \{2, 4\}, \end{cases}$$

$$(\tau_s U_{\mathcal{S}}(I_s))^{\vee} \phi_{\alpha}^k(f) (\tau_s U_{\mathcal{S}}(I_s))^{\vee-1} = -\tau_s \delta \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda} \phi_{\lambda}^{k+}(f_s),$$

$$(\tau_t U_{\mathcal{S}}(I_t))^{\vee} \phi_{\alpha}^k(f) (\tau_t U_{\mathcal{S}}(I_t))^{\vee-1} = -\tau_t \delta \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\lambda} \phi_{\lambda}^k(f_t^{*}),$$

$$(\tau_{st} U_{\mathcal{S}}(I_{st}))^{\vee} \phi_{\alpha}^k(f) (\tau_{st} U_{\mathcal{S}}(I_{st}))^{\vee-1} = -\tau_{st} \phi_{\alpha}^{k+}(f_{st}^{*}),$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \tau_s \in \{1, -1\}, \tau_t \in \begin{cases} \{1, -1\} & \text{für } k \in \{1, 2\} \\ \{1, -1\} & \text{für } k \in \{3, 4\} \end{cases}, \tau_{st} \in \begin{cases} \{1, -1\} & \text{für } k \in \{1, 2\} \\ \{1, -1\} & \text{für } k \in \{3, 4\} \end{cases}, \\ = \begin{cases} -1 & \text{für } k=4 \\ 1 & \text{für } k \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Für die Wirkung des Operators C aus (5.54) folgt nach (5.54.1-2) für $\mu > 0$:

$$(5.63) \quad \check{C} \phi_{\alpha}^k(f) \check{C}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \sum_{\beta=1}^2 (\mathcal{Q})_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^{k+2}(f) & \text{für } k \in \{1, 3\} \\ -\frac{1}{\mu} \sum_{\beta=1}^2 (\tilde{\mathcal{Q}})_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^{k+2}(f) & \text{für } k \in \{2, 4\} \end{cases}$$

wobei $k+2$ modulo 4 zu verstehen ist.

Weiter folgt aus (5.46.d):

$$(5.64) \quad \phi_{\alpha}^{1+}(f) = \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^2(f), \quad \phi_{\alpha}^{3+}(f) = \sum_{\beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^4(f).$$

(5.62), (5.63) reproduzieren die Ergebnisse des Teils I der Arbeit [32]. Der ins Detail gehende Vergleich wird durch formale Verschiedenheiten (andere Minkowski-"Metrik" und Verwendung des Spinorkalküls bei THEIS) etwas erschwert und soll hier nicht durchgeführt werden.

Betont seien hier die wesentlichen Unterschiede: Die Inversionsoperatoren und die Ladungskonjugation werden im Gegensatz zu unserer Methode durch ihre Wirkung auf die Feldoperatoren erklärt; ihre Existenz als unitäre (bzw. antiunitäre) Operatoren im Fockraum folgt dann aufgrund allgemeiner Sätze, und zwar für beliebige Wahl der Phasenfaktoren $\tau_s, \tau_t, \tau_{st}$ in (5.62). Allerdings werden die Operatoren nicht explizit angegeben; insbesondere wird nicht untersucht, wann diese aus Operatoren im Einteilchenraum durch die kanonische Operation "v" aus (5.24) hervorgehen. Gerade dieser bei uns stets geforderte Zusammenhang der Fockraumoperatoren mit Operatoren im Einteilchenraum ist es, der die Phasenfaktoren der Inversionsoperatoren einschränkt (vgl. (5.59) ff). Durch Vergleich von [32; (13), (34)] mit (5.63), (5.64) findet man Übereinstimmung des Ladungskonjugationsoperators in [32] mit unserem, und durch Vergleich von [32; (40)] mit (5.62) die Übereinstimmung des CP-Operators in [32] mit unserem Rauminversionsoperator (jeweils in ihrer Wirkung auf die Felder). Für $\mu=0$ erfüllen unsere Felder nach (5.44) zusätzlich Weylgleichungen:

$$(5.65) \quad \sum_{\beta=1}^2 ((\tilde{\partial})_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^k)(f) = 0, \quad k \in \{1, 3\}; \quad \sum_{\beta=1}^2 ((\partial)_{\alpha\beta} \phi_{\beta}^k)(f) = 0, \quad k \in \{2, 4\}.$$

Die gesonderte Behandlung des Falles $\mu=0$ in [32] unterscheidet sich von unserer dadurch, daß dort die Erfüllung einer Weylgleichung für die Zustände gefordert wird, während bei uns das für $\mu=0$ "automatisch" semidefinit werdende Skalarprodukt die Gültigkeit einer Weylgleichung für die Felder zur Folge hat. Beide Varianten können als feldtheoretische Formulierung der Weylschen Zweikomponententheorie des Neutrinos angesehen werden.

Vierkomponentige Spin-1/2-Felder (Diracfelder).

Zu den 2-komponentigen Feldern $\phi^1, \dots, \phi^4$ aus (5.60) gehören nach (5.45) wohldefinierte 4-komponentige Felder $\psi^1, \dots, \psi^4$. Um deren Eigenschaften in enger Anlehnung an die übliche Schreibweise für das Diracfeld angeben zu können, führen wir zwei Sätze von " γ -Matrizen" ein und treffen die Verabredung, daß in Formeln für ψ^1 und ψ^3 stets die γ -Matrizen aus (5.66.a) und in solchen für ψ^2 und ψ^4 diejenigen aus (5.66.b) verwendet werden; dadurch erübrigt sich eine Unterscheidung in der Bezeichnung.

$$(5.66.a) \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_0 \\ \delta_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \gamma_5 = -1 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(5.66.b) \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_0 \\ \delta_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_1 \\ \delta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad \gamma_5 = -1 \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt leicht: $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_+ = 2(I_s)_{\alpha\beta}$.

Mit (5.61) folgt dann aus (5.45) und (5.46.e):

(5.67) Mit $(a, A), f, g, k, \varphi$ wie in (5.62) und $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_g(a, A) \psi_\alpha^k(f) \underline{U}_g(a, A)^{-1} &= \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^4 \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \psi_\lambda^k(\{a, A\}f); k \in \{1, 3\} \\ \sum_{\lambda=1}^4 \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \psi_\lambda^k(\{a, A\}f); k \in \{2, 4\} \end{cases}, \\ [\psi_\alpha^k(f), \psi_\beta^k(g)]_+ &= [\overline{\psi}_\alpha^k(f), \overline{\psi}_\beta^k(g)]_+ = 0, \quad \overline{\psi}_\alpha^k(f) = \sum_{\lambda=1}^4 (\delta_\alpha)_{\alpha\lambda} \psi_\lambda^{k+}(f), \\ [\psi_\alpha^k(f), \psi_\beta^k(g)]_+ &= \begin{cases} 1((1(\delta_\lambda)_{\alpha\beta} \partial^{\lambda+\mu} \Delta_\mu)(f * g_{st})) & \text{für } \mu > 0 \\ -\delta_{\alpha,1} \delta_{\beta,2} ((\delta_\lambda)_{\alpha\beta} \partial^{\lambda+\mu} \Delta_\mu)(f * g_{st}) & \text{für } \mu = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$(\tau_s \underline{U}_g(I_s))^\vee \psi_\alpha^k(f) (\tau_s \underline{U}_g(I_s))^\vee{}^{-1} = \tau_s \delta \sum_{\lambda=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ -\Gamma & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \overline{\psi}_\lambda^k(f_s),$$

$$(\tau_t \underline{U}_g(I_t))^\vee \psi_\alpha^k(f) (\tau_t \underline{U}_g(I_t))^\vee{}^{-1} = -\tau_t \delta \sum_{\lambda=1}^4 \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \psi_\lambda^k(f_t^*),$$

$$(\tau_{st} \underline{U}_g(I_{st}))^\vee \psi_\alpha^k(f) (\tau_{st} \underline{U}_g(I_{st}))^\vee{}^{-1} = \tau_{st} \delta \sum_{\lambda=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \overline{\psi}_\lambda^k(f_{st}^*),$$

mit $\tau_s \in \{1, -1\}$, $\tau_t \in \{1, -1\}$ für $k \in \{1, 2\}$, $\tau_{st} \in \{1, -1\}$ für $k \in \{3, 4\}$,

$$\delta = \begin{cases} -1 & \text{für } k=4 \\ 1 & \text{für } k \in \{1, 2, 3\} \end{cases},$$

$$(-1) \sum_{\nu=1}^4 ((\delta_\lambda)_{\alpha\nu} \partial^{\lambda+\mu} \Delta_\mu) \psi_\nu^k(f) = 0.$$

Für $\mu=0$ gilt überdies:

$$(5.68) \quad \sum_{\beta=1}^4 (\delta_5)_{\alpha\beta} \psi_\beta^k(f) = -(-1)^k \psi_\alpha^k(f).$$

Für C aus (5.54) folgt nach (5.54.3) für $\mu > 0$:

$$(5.69) \quad (\tau_c C)^\vee \psi_\alpha^k(f) (\tau_c C)^\vee{}^{-1} = \tau_c \delta \sum_{\lambda=1}^4 \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix}_{\alpha\lambda} \overline{\psi}_\lambda^k(f),$$

mit $\tau_c \in \{1, -1\}$ für $k \in \{1, 2\}$ und $\delta = \begin{cases} 1 & \text{für } k \in \{1, 2, 3\} \\ -1 & \text{für } k=4 \end{cases}$.

Wir vergleichen nun das Transformationsverhalten unter Inversionen und Ladungskonjugation mit dem des Diracfeldes in [28]: Für alle $\eta_s, \eta_t, \eta_c \in \mathbb{C}_1$ gibt es nach [28] Operatoren $U(i_s), U(i_t), U_c$ (s. [28;p. 233, (111a); p. 235, (124a); p. 235, (120c)]) - die üblichen Operatoren der Rauminversion, Zeitinversion und Ladungskonjugation -, für die gilt:

$$(5.70) \quad U(i_s) \Psi_\alpha(f) U(i_s)^{-1} = \eta_s \sum_{\beta=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \Psi_\beta(f_s),$$

$$U(i_t) \Psi_\alpha(f) U(i_t)^{-1} = \eta_t \sum_{\beta=1}^4 \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \Psi_\beta(f_t^*),$$

$$U_c \Psi_\alpha(f) U_c^{-1} = \eta_c \sum_{\beta=1}^4 \begin{pmatrix} -\Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \Psi_\beta(f).$$

Dabei haben wir benutzt, daß die "Ladungskonjugationsmatrix" $\mathcal{C}$ in [28] als $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\Gamma & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$ gewählt werden kann, da dann mit unseren γ -Matrizen gilt: $\mathcal{C}^{-1} \gamma_\lambda \mathcal{C} = -(\gamma_\lambda)^t$, $\mathcal{C}^t = -\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^+ \mathcal{C} = 1$. Durch Vergleich von (5.67), (5.69) mit (5.70) erkennt man sofort, daß der Kommentar (5.59) ff. sinnvoll auch für das Diracfeld gilt.

6. Die volle Poincarégruppe als physikalische Symmetriegruppe

Im Rahmen der formalen Wechselwirkungstheorie wird untersucht, ob die volle Poincarégruppe eine Symmetriegruppe (im Sinn von (2.9)) der Elementarteilchenphysik ist. Es wird gezeigt, daß dies in der Näherung der Fall ist, in der die Symmetrien T und PCT nicht gebrochen sind.

6.1. Beschreibung freier Teilchensysteme.

Bisher haben wir mehrfach den Zusammenhang der IPSDen von $\mathcal{P}_0$ mit freien Einteilchensystemen und der zugehörigen Fockdarstellungen mit freien Vielteilchensystemen angesprochen. Diesen, im Prinzip wohlbekannten Zusammenhang präzisieren wir nun für den allgemeinen Fall verschiedener Teilchenarten.

Die Teilchenarten, die das betrachtete freie Vielteilchensystem aufbauen, seien mit Hilfe der (höchstens abzählbaren) Menge X indiziert, wobei Teilchen und Antiteilchen unterschieden werden. Für jedes $k \in X$ seien μ_k die Masse ($\mu_k \geq 0$) und δ_k der Spin bzw. für $\mu_k = 0$ die Helizität der k -ten Teilchenart. Weiter seien U_k für $k \in X$ die CUED U_{μ_k, δ_k} von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ aus (4.14) oder irgendeine dazu unitäräquivalente Darstellung und H_k der zugehörige Hilbertraum. Der Zustandsraum des

Vielteilchensystems ist dann:

$$(6.1) \quad H := F_+(H_+) \otimes F_-(H_-), \quad H_\varepsilon := \bigoplus_{k \in X_\varepsilon} H_k \quad \text{mit} \quad X_\varepsilon := \{k \in X \mid (-1)^{2|\varepsilon_k|} = \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \{+, -\},$$

und das relativistische Transformationsverhalten sowie die Zeitentwicklung des Systems sind durch folgende CUED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ auf H gegeben:

$$(6.2) \quad U: \tilde{\mathcal{P}}_0 \longrightarrow \mathcal{U}_+(H), \quad g \longmapsto (U_+(g))^\vee \otimes (U_-(g))^\vee \quad \text{mit} \\ U_\varepsilon: \tilde{\mathcal{P}}_0 \longrightarrow \mathcal{U}_+(H_\varepsilon), \quad g \longmapsto \bigoplus_{k \in X_\varepsilon} U_k(g), \quad \varepsilon \in \{+, -\}.$$

Die Beschreibung des Systems ist vollständig, wenn wir noch die Operatoren angeben, die den physikalisch wesentlichen Observablen zugeordnet sind. Dazu treffen wir zunächst eine mathematische Feststellung: Sei für jedes $k \in X$ ein selbstadjungierter Operator A_k auf H_k gegeben. Dann sind $A_\varepsilon := \bigoplus_{k \in X_\varepsilon} A_k$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, selbstadjungierte Operatoren auf H_ε und $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}_+(H)$, $r \longmapsto (\exp(irA_+))^\vee \otimes (\exp(irA_-))^\vee$, ist eine CUED. Nach dem Stoneschen Theorem ist somit durch

$$(6.3) \quad A := \text{st.Op.Lim}((\exp(irA_+))^\vee \otimes (\exp(irA_-))^\vee - 1_H) / ir \\ r \rightarrow 0$$

ein selbstadjungierter Operator auf H definiert. Seien weiter $\psi_1, \dots, \psi_n$ aus dem Definitionsbereich von A_+ und $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ aus dem Definitionsbereich von A_- . Dann gilt:

$$(6.4) \quad A(S_+(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \otimes S_-(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m)) = \\ = \sum_{k=1}^n S_+(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_{k-1} \otimes A_+ \psi_k \otimes \psi_{k+1} \otimes \dots \otimes \psi_n) \otimes S_-(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m) + \\ + \sum_{k=1}^m S_+(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \otimes S_-(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{k-1} \otimes A_- \varphi_k \otimes \varphi_{k+1} \otimes \dots \otimes \varphi_m).$$

Sind insbesondere $\psi_1, \dots, \psi_n$ Eigenvektoren von A_+ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ Eigenvektoren von A_- mit den Eigenwerten $\lambda'_1, \dots, \lambda'_m$, so ist $S_+(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n) \otimes S_-(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m)$ Eigenvektor von A mit

dem Eigenwert $\sum_{k=1}^n \lambda_k + \sum_{k=1}^m \lambda'_k$. Besonders diese letzte Eigenschaft macht

folgendes Postulat plausibel: Werde eine Observable (z.B. die Energie) für jedes $k \in X$ im Einteilchen-Zustandsraum H_k der k -ten Teilchenart durch den selbstadjungierten Operator A_k beschrieben, so entspricht dieser Observablen im Vielteilchenraum H der nach (6.3) konstruierte Operator A . Für eine gründliche Diskussion der Operatoren,

die den Observablen Energie, Impuls, Drehimpuls, Spin, Helizität und Masse im Einteilchen-Zustandsraum zugeordnet sind, verweisen wir auf [12.a]. Gibt es nun für eine Observable ein Element x der Liealgebra von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ derart, daß der zugeordnete Operator auf jedem H_k von der Form $A_k := \sqrt{-1} dU_k(x)$ ist (s. (5.26)), so gilt für den nach (6.3) konstruierten Operator A mit U aus (6.2): $A = \sqrt{-1} dU(x)$. Damit sind die Operatoren für Energie, Impuls und Drehimpuls ebenso wie im Einteilchenraum auch im Vielteilchenraum Generatoren der Zeitverschiebungen, Raumverschiebungen und Drehungen. Den Teilchenzahloperator N_1 für die 1-te Teilchenart erhält man gemäß (6.3) aus der Schar $(\delta_{kl} 1_{H_k})_{k \in X}$ von Einteilchenoperatoren.

Operatoren auf H , die Vektoren aus H_+ bzw. H_- vernichten und erzeugen werden definiert durch:

$$(6.5) \quad \forall \psi \in H_+ \quad (c(\psi) := c_+(\psi) \otimes 1_{F_-(H_-)}, \quad c^+(\psi) := c_+^+(\psi) \otimes 1_{F_-(H_-)}), \\ \forall \psi \in H_- \quad (c(\psi) := 1_{F_+(H_+)} \otimes c_-(\psi), \quad c^+(\psi) := 1_{F_+(H_+)} \otimes c_-^+(\psi)).$$

Auf dem dichten linearen Teilraum $H_0 := S_+(T_0(H_+)) \otimes S_-(T_0(H_-))$ von H (s. 5.2.) gelten die folgenden Gleichungen, die sich sofort aus (5.21) ergeben:

$$(6.6) \quad \forall \varphi, \psi \in H_+ \quad ([c(\varphi), c(\psi)]_+ = [c^+(\varphi), c^+(\psi)]_+ = 0, \\ [c(\varphi), c^+(\psi)]_+ = \langle \varphi | \psi \rangle_{H_0}, \\ \forall \varphi, \psi \in H_- \quad ([c(\varphi), c(\psi)]_- = [c^+(\varphi), c^+(\psi)]_- = 0, \\ [c(\varphi), c^+(\psi)]_- = \langle \varphi | \psi \rangle_{H_0}, \\ \forall \psi \in H_+, \varphi \in H_- \quad ([c(\varphi), c(\psi)]_- = [c^+(\varphi), c^+(\psi)]_- = [c(\psi), c^+(\varphi)]_- = 0).$$

Weiter folgt sofort aus (5.25) für U aus (6.2):

$$(6.7) \quad \forall g \in \tilde{\mathcal{P}}_0, \varepsilon \in \{+, -\}, \psi \in H_\varepsilon \quad (U(g)c(\psi)U(g)^{-1} = c(U_\varepsilon(g)\psi), \\ U(g)c^+(\psi)U(g)^{-1} = c^+(U_\varepsilon(g)\psi)).$$

Ist Ω_+ bzw. Ω_- der Vakuumzustand in $F_+(H_+)$ bzw. $F_-(H_-)$, so ist $\Omega_+ \otimes \Omega_-$ der Vakuumzustand in H , $\psi \otimes \Omega_-$ für $\psi \in H_+$ ein Einfermionen-Zustand und $\Omega_+ \otimes \psi$ für $\psi \in H_-$ ein Einbosonen-Zustand. Für jeden (abgeschlossenen) Unterraum H_ε^i von H_ε , auf dem sich U_ε zu einer unverdoppelten oder verdoppelten CMD von $\tilde{\mathcal{P}}$ fortsetzen läßt, kann man auf $F_\varepsilon(H_\varepsilon^i)$ freie Felder gemäß (5.35) definieren. Deren Feldoperatoren lassen sich unter

Beibehaltung ihrer Eigenschaften zu Feldoperatoren auf H fortsetzen: $F_\varepsilon(H_\varepsilon')$ werde in natürlicher Weise als (abgeschlossener) Unterraum von $F_\varepsilon(H_\varepsilon)$ angesehen und P_ε sei der Projektor von $F_\varepsilon(H_\varepsilon)$ auf $F_\varepsilon(H_\varepsilon')$. Dann wird der auf $F_\varepsilon(H_\varepsilon')$ definierte Feldoperator $\phi(f)$ durch den auf H definierten Feldoperator $\phi(f)P_+ \otimes 1_{F_-(H_-)}$ für $\varepsilon = +$ bzw. $1_{F_+(H_+)} \otimes \phi(f)P_-$ für $\varepsilon = -$ ersetzt. Sind die betrachteten Teilchen alle Bosonen oder alle Fermionen, so kann man natürlich in der Definition des Zustandsraumes und folglich auch der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einen Faktor des direkten Produkts weglassen.

6.2. Inversionen in einer formalen Wechselwirkungstheorie

Um die darstellungstheoretischen Resultate mit der Physik zu verbinden, betrachten wir nun Streuprozesse. Dafür haben wir in (2.8) einen sehr allgemeinen Rahmen angegeben, der für die jetzige Diskussion etwas konkretisiert werden soll. Da wir uns aber nicht auf die S-Matrix-Version (2.8.b,d) beschränken wollen und es eine konsistente dynamische Theorie nicht gibt, müssen wir uns in wesentlichen Punkten mit "formalen" Aussagen zufrieden geben.

Sei $U: \tilde{\mathcal{P}}_0 \longrightarrow \mathcal{U}_+(H)$ eine CUED der Form (6.2), die also freie Teilchen mit beliebig vorgegebenen Werten für Masse und Spin beschreibt. Dann ist durch dU aus (5.26) eine Darstellung der Liealgebra $L(\mathcal{P}_0)$ von $\mathcal{P}_0^{(+)}$ durch schiefadjungierte Operatoren auf H gegeben. Ist nun $\{\underline{P}^\mu, \underline{M}^{\mu\nu} | \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ die übliche Basis von $L(\mathcal{P}_0)$, d.h. $\underline{P}^\mu$ bzw. $\underline{M}^{\mu\nu}$ erzeugt die einparametrische Untergruppe der Translationen in μ -Richtung bzw. der Lorentzformationen, welche die μ, ν -Ebene invariant lassen, so wird Wechselwirkung durch eine "Störung" der Generatoren $\underline{P}^\mu := idU(\underline{P}^\mu), \underline{M}^{\mu\nu} := idU(\underline{M}^{\mu\nu})$, eingeführt, und zwar auf folgende, durch den Hamiltonformalismus nahegelegte Weise: Sei für jedes $x \in \mathbb{R}^4$ $H_W(x)$ ein selbstadjungierter Operator auf H derart, daß gilt:

$$(6.8) \forall x \in \mathbb{R}^4, (a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \quad (U(a, A)H_W(x)U(a, A)^{-1} = H_W(\Lambda(A)x + a)), \\ ([H_W(o, \vec{x}), H_W(o, \vec{y})]_- = 0).$$

Dann findet man durch formale Rechnung für die Ausdrücke

+) Wir identifizieren in naheliegender Weise die Liealgebren von $\mathcal{P}_0$ und $\tilde{\mathcal{P}}_0$.

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad P_W^0 &:= P^0 + \int d^3x H_W(0, \vec{x}), \\
 P_W^j &:= P^j, \\
 M_W^{0j} &:= M^{0j} + \int d^3x x^j H_W(0, \vec{x}), \quad M_W^{j0} := -M_W^{0j}, \\
 M_W^{jk} &:= M^{jk}, \quad j, k=1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

dieselben Vertauschungsrelationen wie für die $P^\mu, M^{\mu\nu}$ (s. [14 ; p.5]). Man könnte daher vermuten, daß durch (6.9) die Generatoren einer neuen CUED $U_W: \widetilde{\mathcal{P}}_0 \longrightarrow \mathcal{U}_+(H)$ gegeben sind, d.h. daß gilt $P_W^\mu = \text{id} U_W(P^\mu)$, $M_W^{\mu\nu} = \text{id} U_W(M^{\mu\nu})$, und daß dann der neue Hamiltonoperator P_W^0 anders als P^0 eine physikalisch nichttriviale Zeitevolution (Dynamik) beschreibt. Die hartnäckige Verschwörung der Mathematik gegen die Formulierung einer relativistischen Quantendynamik beginnt damit, daß dem keineswegs so ist. Vielmehr erweisen sich alle denkbaren Kandidaten für H_W als so "singulär", daß es außer dem Nullvektor keinen Vektor gibt, auf dem die Operatoren (6.9) definiert sind. Das historisch zuerst in Angriff genommene Sanierungsprogramm (Renormierung) setzt nicht bei (6.9) an, sondern bei der aus (6.9) durch formale Rechnung folgenden Reihenentwicklung für die U-Matrix^{+) $U(t, t') := \exp(iP^0 t) \exp(-i(t-t')P_W^0) \exp(-iP^0 t')$ bzw. die S-Matrix $S := U(\infty, -\infty)$. Dagegen wird in neuerer Zeit ein als konstruktive Feldtheorie bekanntes Programm verfolgt, das direkter an (6.9) anknüpft und durch das man nicht nur eine wohldefinierte S-Matrix, sondern auch eine "wechselwirkende" CUED U_W von $\widetilde{\mathcal{P}}_0$ zu erhalten hofft.}

Wir wollen annehmen, daß sich die Eigenschaften von U_W - wie auch immer deren exakte Definition aussehen mag - in den formalen Eigenschaften der durch formale Exponentiation aus (6.9) gewonnenen Ausdrücke widerspiegeln. Die in (2.8.c) postulierten Abbildungen α_+ und α_- , die einem Zustand den zugehörigen asymptotisch freien Zustand in der Zukunft und in der Vergangenheit zuordnen, sind durch die Operatoren $U(\infty, 0)$ und $U(-\infty, 0)$ gegeben:

$$(6.10) \quad \forall x \in H \text{ mit } \|x\|=1, \varepsilon \in \{+, -\} \quad (\alpha_\varepsilon |x\rangle \langle x| = |U(\varepsilon\infty, 0)x\rangle \langle U(\varepsilon\infty, 0)x|).$$

Mit den Vertauschungsrelationen von $L(\widetilde{\mathcal{P}}_0)$ und der formalen Relation

$$(6.11) \quad \exp(Y) X \exp(-Y) = X + [Y, X]/1! + [Y, [Y, X]]/2! + \dots$$

+) Häufig wird, einer historischen Sackgasse folgend, ein "Wechselwirkungsbild" eingeführt, das diesen Operator als Zeitevolutionsoperator erscheinen läßt.

findet man für alle $t \in \mathbb{R}, j, k \in \{1, 2, 3\}$:

$$(6.12) \quad U(t, o) P_W^o = (P^o + \int d^3 \vec{x} H_W(t, \vec{x})) U(t, o), \quad U(t, o) P_W^j = P^j U(t, o), \\ U(t, o) M_W^{oj} = (M^o + \int d^3 \vec{x} x^j H_W(t, \vec{x})) U(t, o), \quad U(t, o) M_W^{jk} = M^{jk} U(t, o).$$

Damit gilt, wenn wir noch $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int d^3 \vec{x} H_W(t, x) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int d^3 \vec{x} x^j H_W(t, x) = 0$ annehmen, für alle $(a, A) \in \mathcal{P}_o, \varepsilon \in \{+, -\}$:

$$(6.13) \quad U(\varepsilon \infty, o) U_W(a, A) = U(a, A) U(\varepsilon \infty, o),$$

woraus mit (6.10) die Eigenschaft (2.8.1) folgt. Wenn U Version einer nichttrivialen Bündeldarstellung ist, d.h. wenn es eine Familie $(P_i)_{i \in I}$ von Projektoren gibt, die mit allen $U(a, A)$ vertauscht, so ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß auch alle $U_W(a, A)$ mit allen P_i vertauschen, gegeben durch:

$$(6.14) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, i \in I \quad (H_W(x) P_i = P_i H_W(x)).$$

Daraus folgt dann:

$$(6.15) \quad \forall i \in I, \varepsilon \in \{+, -\} \quad (U(\varepsilon \infty, o) P_i H \subset P_i H),$$

und damit und mit (6.10) die Eigenschaft (2.8.2). Die formalen Eigenschaften der S-Matrix erschließt man am besten aus der formalen Reihe:

$$(6.16) \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n T(H_W(x_1) \dots H_W(x_n)).$$

Damit folgt sofort aus (6.8):

$$(6.17) \quad \forall g \in \tilde{\mathcal{P}}_o \quad (U(g) S U(g)^{-1} = S),$$

und, wenn (6.14) erfüllt ist:

$$(6.18) \quad \forall i \in I \quad (S P_i S^{-1} = P_i).$$

Das sind gerade die Eigenschaften (2.8.4) und (2.8.5). Wegen der Eigenschaft $\forall t, t', t'' \in \mathbb{R} \quad (U(t, t') U(t', t'') = U(t, t''))$ der U-Matrix ist auch (2.8.3) formal erfüllt: $S U(-\infty, o) = U(+\infty, -\infty) U(-\infty, o) = U(\infty, o)$ und somit $S \alpha_-(P) S^{-1} = S \alpha_- (|x \rangle \langle x|) S^{-1} = S |U(-\infty, o) x \rangle \langle U(-\infty, o) x| S^{-1} = |U(\infty, o) x \rangle \langle U(\infty, o) x| = \alpha_+(P).$

Damit haben wir nach Vorgabe einer CBD von $\mathcal{P}_0$, die ein freies Teilchensystem beschreibt, und einer Hamiltondichte formal diejenigen Größen konstruiert, die nach (2.8) ein Teilchensystem mit Wechselwirkung charakterisieren sollten. Wir untersuchen nun, wann die volle Poincarégruppe $\mathcal{P}$ im Sinne von (2.9) Symmetriegruppe eines solchen Systems ist. Dazu ist zunächst zu klären, ob und wie sich die "freie" Darstellung U zu einer Version einer CBD von $\tilde{\mathcal{P}}$ fortsetzen läßt. Bei Berücksichtigung einiger zusätzlicher physikalisch begründeter Forderungen lassen sich wegen der speziellen Form (6.2) von U alle Fortsetzungen explizit angeben (vgl. 6.3.). Hier nehmen wir eine solche Fortsetzung als gegeben an: Sei $\tilde{U}: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{U}(H, P_I)$ eine CBD, die eine Version besitzt, welche auf $\tilde{\mathcal{P}}_0$ eingeschränkt mit der am Anfang von 6.2. betrachteten CUED U übereinstimmt; diese Version nennen wir ebenfalls U . Ob sich nun auch U_W zu einer Version einer CBD U_W von $\tilde{\mathcal{P}}$ mit den in (2.9) geforderten Eigenschaften fortsetzen läßt, hängt von der Hamiltondichte H_W ab. Hat diese neben (6.14) noch folgende Eigenschaften

$$(6.19) \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (U(I_s) i H_W(x) U(I_s)^{-1} = i H_W(I_s x)), \\ (2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (U(I_t) i H_W(x) U(I_t)^{-1} = -i H_W(I_t x)),$$

so ist als einfache Konsequenz des folgenden Satzes (6.22) durch

$$(6.20) \quad \forall (a, A, I_j) \in \tilde{\mathcal{P}} \quad (U_W(a, A, I_j) := U_W(a, A) U(I_j))$$

formal eine Version einer CBD auf (H, P_I) definiert. Dann erfüllen $U(\varepsilon\infty, 0)$ und S , wie man leicht sieht, die folgenden formalen Gleichungen:

$$(6.21) \quad (1) \quad U(\varepsilon\infty, 0) U(I_s) = U(I_s) U(\varepsilon\infty, 0), \quad \varepsilon \in \{+, -\}, \\ (2) \quad U(\varepsilon\infty, 0) U(I_t) = U(I_t) U(-\varepsilon\infty, 0), \quad \varepsilon \in \{+, -\}, \\ (3) \quad U(\varepsilon\infty, 0) U(I_{st}) = U(I_{st}) U(-\varepsilon\infty, 0), \quad \varepsilon \in \{+, -\}, \\ (4) \quad U(I_s) S U(I_s)^{-1} = S, \\ (5) \quad U(I_t) S U(I_t)^{-1} = S^+, \\ (6) \quad U(I_{st}) S U(I_{st})^{-1} = S^+.$$

Aus (6.21) folgt sofort, daß (2.9) erfüllt ist, sofern man auf der rechten Seite von (2.9.1) bzw. (2.9.2) für $g=(a, A, I_t)$ und $g=(a, A, I_{st})$ folgende Substitution vornimmt: $\alpha_\varepsilon \mapsto \alpha_{-\varepsilon}, S \mapsto S^+$. Diese Modifikation

ist konsistent mit der Vorstellung, daß $U(I_t)$ die Rolle von einlaufenden und auslaufenden Teilchen vertauscht. Es ist bemerkenswert, daß dies nichts mit der Antiunitarität von $U(I_t)$ und $U(I_{st})$ zu tun hat, die in diesem Abschnitt nirgends benützt wurde.

Wir tragen abschließend einen Satz nach, der neben der Begründung von (6.20) und (6.21) auch die aus physikalischen Gründen interessante Wirkung der Inversionen auf die (schiefadjunglierten) Generatoren einer Darstellung der Poincarégruppe liefert.

(6.22) Satz: Seien $\tilde{U}: \tilde{\mathcal{P}}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$, $\tilde{V}: \{I_0, I_s, I_t, I_{st}\} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ CBDen, U eine Version von $\tilde{U}$, die eine CUED ist, und V eine Version von $\tilde{V}$. Dann ist $U': \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$, $(a, A, I) \mapsto \tilde{U}(a, A) \tilde{V}(I)$ genau dann eine CBD, wenn für alle $k, l \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

- (1) $V(I_s) dU(\underline{P}^0) V(I_s)^{-1} = -V(I_t) dU(\underline{P}^0) V(I_t)^{-1} = dU(\underline{P}^0)$,
- (2) $V(I_s) dU(\underline{P}^k) V(I_s)^{-1} = -V(I_t) dU(\underline{P}^k) V(I_t)^{-1} = -dU(\underline{P}^k)$,
- (3) $V(I_s) dU(\underline{M}^{ok}) V(I_s)^{-1} = V(I_t) dU(\underline{M}^{ok}) V(I_t)^{-1} = -dU(\underline{M}^{ok})$,
- (4) $V(I_s) dU(\underline{M}^{kl}) V(I_s)^{-1} = V(I_t) dU(\underline{M}^{kl}) V(I_t)^{-1} = dU(\underline{M}^{kl})$.

Beweis: Sei $\tilde{U}'$ eine CBD von $\tilde{\mathcal{P}}$. Dann gilt mit ϕ aus (4.3): $U'(I_j) U'(a, A) U'(I_j)^{-1} = U'(I_j a, \phi_{I_j}(A))$. Daher gibt es für alle

$(a, A) \in \mathcal{P}_0$ und $j \in \{0, s, t, st\}$ ein $\mu_j(a, A) \in \mathcal{U}(H, P_I)$ mit

- (5) $V(I_j) U(a, A) V(I_j)^{-1} = \mu_j(a, A) U(I_j a, \phi_{I_j}(A))$. Man rechnet leicht

nach, daß $(a, A) \mapsto \mu_j(a, A)$ für jedes j ein Homomorphismus ist; somit und wegen der speziellen Form von $\mathcal{U}(H, P_I)$ folgt mit (4.6), daß $\mu_j(a, A)$ stets gleich 1 ist. Anwendung von (5) auf die einparametrischen Untergruppen $\exp(\lambda \underline{P}^\mu)$, $\exp(\lambda \underline{M}^{\mu\nu})$ liefert dann mit (5.26) sofort (1) - (4). Umgekehrt folgt aus (1) - (4) die Gültigkeit von (5) mit trivialem μ_j , und zwar zunächst für (a, A) aus einer Umgebung von $(0, 1)$ und damit wegen des Zusammenhangs von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ für alle (a, A) . Die Homomorphieeigenschaft für $\tilde{U}'$ folgt dann durch einfache Rechnung. Die Stetigkeit von $\tilde{U}'$ überlegt man sich leicht. ■

6.3. Bündeldarstellungen der vollen Poincarégruppe im Zustandsraum relativistischer Teilchensysteme

Wir untersuchen die Struktur der CBDen von $\mathcal{P}$ und insbesondere derjenigen CBDen von $\mathcal{P}$, die auf $\mathcal{P}_0$ eingeschränkt das relativistische

Transformationsverhalten freier Vielteilchensysteme aus 6.1. liefern.
Zunächst betrachten wir die CBDen von $\mathcal{P}_0$.

(6.23) Satz: Seien $\tilde{U}: \mathcal{P}_0 \longrightarrow \tilde{U}(H, P_I)$ eine CBD, $h_0 := h|_{\mathcal{P}_0}$ mit h aus (4.4) und $\mathcal{G}: \mathcal{P}_0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_0$ mit $h_0 \circ \mathcal{G} = \text{id}_{\mathcal{P}_0}$. Dann gilt:

- (a) $\tilde{U} \circ h_0$ ist eine CBD von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ und es gibt genau eine Version U von $\tilde{U} \circ h_0$, die eine CUED ist.
- (b) $U \circ \mathcal{G}$ mit U aus (a) ist eine Version von $\tilde{U}$ und zugleich einer CBD von $\mathcal{P}_0$ in $\tilde{U}(H, P_I)$ mit $P_I := (P_\varepsilon)_{\varepsilon \in \{+, -\}}$, $P_\varepsilon := (1_{H-\varepsilon U(0, -1)})/2$.
- (c) $\tilde{U}$ wird genau dann von einer SD erzeugt, wenn einer der Projektoren P_ε aus (b) der Einsoperator ist.

Beweis: (a): h_0 ist ein stetiger Homomorphismus; damit ist $\tilde{U} \circ h_0$ eine CBD. $\tilde{U} \circ h_0$ ist nach (3.8) direkte Summe von transitiven CBDen; letztere sind nach (3.11) CSDen. Da alle Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ nach (4.5) trivial sind, hat jeder der direkten Summanden eine ED als Version. Diese ist nach (3.26.c) und (4.6) eindeutig bestimmt, nach (3.16) unitär und nach [1; p. 14] stetig. Die direkte Summe dieser Versionen liefert eine Version U von $\tilde{U} \circ h_0$ und zwar die einzige, welche eine CUED ist.

(b), (c): Für alle $g \in \mathcal{P}_0$ gilt: $(U \circ \mathcal{G})(g) = U(\mathcal{G}(g)) \in (\tilde{U} \circ h_0)(\mathcal{G}(g)) = \tilde{U}(g)$; somit ist $U \circ \mathcal{G}$ Version von $\tilde{U}$. Der zweite Teil von (b) und (c) folgen leicht aus $U(0, -1)P_\varepsilon = -\varepsilon P_\varepsilon$. ■

Das Energie-Impuls-Spektrum einer CBD $\tilde{U}$ von $\mathcal{P}$ wird definiert als dasjenige der CUED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$, welche eine Version von $(\tilde{U}|_{\mathcal{P}_0}) \circ h_0$ ist (vgl. dazu den Anfang von 4.2.). Mit (6.23) erhält man die CBDen von $\mathcal{P}_0$ aus den CUEDen von $\tilde{\mathcal{P}}_0$; dies ist eine Verallgemeinerung der für CSDen bereits in (4.14) festgestellten Tatsache. Wir zeigen nun, daß man die CBDen von $\mathcal{P}$ aus den CMDen von $\tilde{\mathcal{P}}$ konstruieren kann.

Zunächst betrachten wir transitive CBDen.

(6.24) Struktursatz über die transitiven CBDen von $\tilde{\mathcal{P}}$:

- (a) Jede transitive CBD von $\tilde{\mathcal{P}}$ ist äquivalent zu einer transitiven CBD, die von einer CSD erzeugt wird.
- (b) Jede transitive CBD von $\tilde{\mathcal{P}}$, deren Energie-Impuls-Spektrum im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel liegt, wird von einer CSD erzeugt.

Beweis: Sei $\tilde{U}: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ eine CBD. (a) Nach (3.10) bestimmt $\tilde{U}$ eine CSD einer offenen Untergruppe von $\tilde{\mathcal{P}}$, also einer der Untergruppen $\tilde{\mathcal{P}}_0, \tilde{\mathcal{P}}_P, \tilde{\mathcal{P}}_T, \tilde{\mathcal{P}}_{PT}, \tilde{\mathcal{P}}$. Damit folgt die Behauptung aus (3.33) mit folgenden Fakten, die sich leicht aus der Analyse in [34; p.189-192] ergeben: 1. Jeder Multiplikator von $\tilde{\mathcal{P}}_0, \dots, \tilde{\mathcal{P}}$ ist äquivalent zu einem stetigen Multiplikator. 2. Jeder Multiplikator von $\tilde{\mathcal{P}}_0, \dots, \tilde{\mathcal{P}}_{PT}$ läßt sich fortsetzen zu einem Multiplikator von $\tilde{\mathcal{P}}$. Wegen 1. ist die gemäß (3.33.2) konstruierte SD von $\tilde{\mathcal{P}}$, welche eine zu $\tilde{U}$ äquivalente CBD erzeugt auch dann stetig, wenn der Hilbertraum nicht separabel ist.

(b) Analog wie (4.16) folgt $\tilde{U}(I_s) \in \tilde{\mathcal{U}}_+(H, P_I), \tilde{U}(I_t) \in \tilde{\mathcal{U}}_-(H, P_I)$. Damit sieht man leicht, daß zu der Version (3.33.2) sogar eine zu $\tilde{U}$ unitär-äquivalente BD gehört, woraus die Behauptung mit (3.32) folgt. ■

(6.25) Struktursatz über die CBDen von $\mathcal{P}$ mit physikalischem Energie-Impuls-Spektrum: Seien $\tilde{U}: \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ eine CBD und $U_0: \tilde{\mathcal{P}}_0 \rightarrow \mathcal{U}(H)$ die CUED, die eine Version von $\tilde{U} \circ h_0$ ist (s. (6.23.a)). Weiter liege für jedes $i \in I$ das Energie-Impuls-Spektrum der CUED $\mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{U}_+(P_I H), g \mapsto U_0(g)|_{P_I H}$, im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel. Dann gibt es CMDen U_i von $\tilde{\mathcal{P}}$, $i \in I'$, $\text{card}(I') \leq 4$, mit Energie-Impuls-Spektrum im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel, deren Multiplikatoren paarweise verschieden und von der Form $\omega_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \{1, -1\}$, aus (4.5) sind, derart, daß $\tilde{U} \circ h$ eine Version der Form $g \mapsto \bigoplus_{i \in I'} U_i(g)$ besitzt.

Beweis: $\tilde{U} \circ h$ ist nach (3.8) eine direkte Summe von transitiven CBDen von $\tilde{\mathcal{P}}$, von denen jede nach (6.24) von einer CSD erzeugt wird. Jede dieser CSDen hat, wie man mit (3.27) leicht erkennt, eine stetige Version, deren Multiplikator wegen (4.16) von der Form (4.5) ist. Bildet man die direkte Summe jeweils derjenigen MDen, deren Multiplikatoren übereinstimmen, so erhält man die MDen $U_i, i \in I'$, der Behauptung. ■

Um die Aussage dieser Sätze zu beleuchten und zur Erleichterung der Sprechweise führen wir einige neue Begriffe ein.

(6.26) Def: Seien $(H, P_I), (H, P'_I)$ Bündelräume über demselben Hilbertraum H , $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I), \tilde{U}': G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P'_I)$ BDen einer Gruppe G und γ_g bzw. γ'_g die für jedes $g \in G$ zu $\tilde{U}(g)$ bzw. $\tilde{U}'(g)$ nach (2.3.f) gehörige Symmetrieoperation in $\mathcal{O}(H, P_I)$ bzw. $\mathcal{O}(H, P'_I)$. Dann definieren wir:

$$(a) (H, P_I) \succ (H, P'_{I'}) \iff \mathcal{O}(H, P_I) \supset \mathcal{O}(H, P'_{I'}),$$

$$(b) \tilde{U} \succ \tilde{U}' \iff (\mathcal{O}(H, P_I) \supset \mathcal{O}(H, P'_{I'})) \text{ und } \forall g \in G (\chi_g | \mathcal{O}(H, P'_{I'}) = \chi'_{g'}).$$

Damit ist je eine Halbordnung " $\succ$ " (in Worten: "kohärenter") auf der Menge der Bündelräume über demselben Hilbertraum und auf der Menge der BDen einer Gruppe auf Bündelräumen über demselben Hilbertraum definiert. Eine BD die bzgl. der letztgenannten Halbordnung maximal ist nennen wir maximal kohärent.

Folgende Eigenschaften kann man leicht verifizieren:

(6.27) Satz: Seien die Voraussetzungen von (6.26) erfüllt. Dann gilt:

$$(a) (H, P_I) \succ (H, P'_{I'}) \iff \tilde{U}(H, P_I) \subset \tilde{U}(H, P'_{I'}) \iff \mathcal{C}(H, P_I) \subset \mathcal{C}(H, P'_{I'}) \\ \iff \forall i \in I' (\exists i \in I (P_i H \supset P'_{i'} H)) \iff$$

Es gibt eine Äquivalenzrelation " $\sim$ " auf I' und eine Bijektion $b: I \rightarrow I'/[\sim]$ mit $\forall i \in I (P_i = \sum_{i' \in b(i)} P'_{i'})$.

$$(b) \tilde{U} \succ \tilde{U}' \iff \text{Es gibt eine Version } U' \text{ von } \tilde{U}' \text{ mit} \\ \forall g, g' \in G (U'(g)U'(g')U'(gg')^{-1} \in \mathcal{C}(H, P_I)).$$

Beim Übergang von einem Bündelraum zu einem kohärenteren, mit dem ursprünglichen nicht identischen Bündelraum werden nach (6.26.a) und insbesondere nach der letzten Äquivalenzaussage in (6.27.a) Überauswahlregeln "aufgehoben", d.h. kohärente Zustände (d.h. Zustände, die durch keine Überauswahlregeln getrennt sind, m. a. W. die zum selben kohärenten Teilraum gehören) bleiben kohärent und gewisse Zustände, die durch Überauswahlregeln getrennt waren, werden kohärent. Ist eine BD $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{U}(H, P_I)$ nicht maximal kohärent, so kann man gewisse Überauswahlregeln aufheben und dann die durch $U(g) \in \tilde{U}(g)$ gemäß (2.3.f) bestimmte Symmetrieoperation χ_g auf die vergrößerte Menge der Präobservablen zu einer Symmetrieoperation χ'_g fortsetzen derart, daß $g \mapsto \chi'_g$ ein Homomorphismus bleibt; derartige Überauswahlregeln sind also hebbare Komplikationen. Dagegen würde eine Aufhebung von Überauswahlregeln im Darstellungsraum einer maximal kohärenten BD diese BD völlig zerstören. Offensichtlich ist eine SD stets maximal kohärent. Eine BD wird genau dann von einer SD erzeugt, wenn diese SD kohärenter als die BD ist. Mit diesen Begriffen besagt (6.25), daß es unter den dort angegebenen Voraussetzungen zu einer CBD eine kohärente maximal kohärente CBD gibt, welche ihrerseits eine direkte Summe aus höchstens vier CSDen ist. Das Indexpaar (α, β) der durch diese CSDen bestimmten Multiplikatoren $\omega_{\alpha\beta}$ aus (4.5) wird in der

Literatur häufig als der "Typ" dieser Darstellung bezeichnet.

Für freie Teilchensysteme wird das relativistische Transformationsverhalten durch eine CUED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ beschrieben, die nicht nur - wie bisher in diesem Abschnitt - durch das Energie-Impuls-Spektrum eingeschränkt ist, sondern überdies die sehr spezielle Form (6.2) hat. Darin kommt die Annahme zum Ausdruck, daß das Transformationsverhalten der Vielteilchenzustände in kanonischer Weise durch dasjenige der Einteilchenzustände bestimmt ist. Diese Annahme wird man auch für das Transformationsverhalten unter Inversionen aufrechterhalten. Um dies präzisieren zu können benötigen wir die folgende Definition.

- (6.28) Def: Seien $(H_k)_{k \in X_+}, (H_k)_{k \in X_-}$ höchstens abzählbare Familien von Hilberträumen, $H_\varepsilon := \bigoplus_{k \in X_\varepsilon} H_k$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $H := F_+(H_+) \otimes F_-(H_-)$, für jedes $k \in X_+ \cup X_-$ N_k der zu H_k gehörige Teilchenzahloperator, d.h.:
- $$N_k := \lim_{r \rightarrow 0} \left(\left(\bigoplus_{j \in X_+} e^{ir\delta_{kj}} 1_{H_j} \right) \otimes 1_{F_-(H_-)}^{-1} \right) / ir \text{ für } k \in X_+,$$
- $$N_k := \lim_{r \rightarrow 0} \left(1_{F_+(H_+)} \otimes \left(\bigoplus_{j \in X_-} e^{ir\delta_{kj}} 1_{H_j} \right)^{-1} \right) / ir \text{ für } k \in X_-,$$
- G eine topologische Gruppe mit $G \supset \mathcal{P}_0$ und $U: G \longrightarrow \mathcal{U}(H)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:
- (1) $\forall g \in G \ (\exists U_+(g) \in \mathcal{U}(H_+), U_-(g) \in \mathcal{U}(H_-) \ (U(g) = (U_+(g))^\vee \otimes (U_-(g))^\vee))$;
 - (2) für jedes $\varepsilon \in \{+, -\}$ und $k \in X_\varepsilon$ ist H_k invariant unter $U_\varepsilon|_{\mathcal{P}_0}$ und die Unterdarstellung von $(U_\varepsilon|_{\mathcal{P}_0}) \circ h_0$ auf H_k eine CUED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ mit halb- oder ganzzahligem Spin je nachdem ob $\varepsilon = +$ oder $\varepsilon = -$;
 - (3) es gibt eine Familie $P_I := (P_i)_{i \in I}$ von Projektoren derart, daß (H, P_I) ein Bündelraum ist, für jedes $k \in X_+ \cup X_-$ N_k zur Menge $\mathcal{O}(H, P_I)$ der Präobservablen gehört und U eine Version einer CBD $\tilde{U}: G \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ ist. Dann nennen wir $\tilde{U}$ aus (3) eine Fock-Bündel-darstellung (FBD) von G .

Aus (3.28.1,2) folgt sofort: $\forall g \in G, k \in X_+ \cup X_- \ (U(g)N_k = N_k U(g))$. Man beachte, daß es zu einer FBD $\tilde{U}$ einer Gruppe verschiedene Familien $(N_k)_{k \in X_+}, (N_k)_{k \in X_-}$ von Teilchenzahloperatoren geben kann, die mit $\tilde{U}$ gemäß (6.28) verbunden sind und die wir dann mit $\tilde{U}$ verträglich nennen. Eine Zusammenfassung der bei der üblichen Behandlung von Symmetrieoperationen von Vielteilchensystemen benutzten Vorstellungen (s. z.B. die gute Darstellung in [20,a; S. 319ff]) liefert das folgende Postulat.

(6.29) Postulat: Die Wirkung von $\mathcal{P}$ im Raum der asymptotischen Zustände eines $\mathcal{P}$ -invarianten Teilchensystems (d.h. $\mathcal{F}$ in (2.9)) wird durch eine FBD von $\mathcal{P}$ beschrieben.

Wir zeigen nun, daß eine FBD sowohl im Fermionen-Einteilchenraum als auch im Bosonen-Einteilchenraum eine CBD bestimmt.

(6.30) Satz: Seien G eine topologische Gruppe mit $G \supset \mathcal{P}_0$, $\tilde{U}: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$ eine FBD von G , $(N_k)_{k \in X_+}$ und $(N_k)_{k \in X_-}$ mit $\tilde{U}$ verträgliche Familien von Teilchenzahloperatoren und für jedes $\varepsilon \in \{+, -\}$ P_ε der Projektor von H auf den Eigenunterraum von $\sum_{k \in X_\varepsilon} N_k$ zum Eigenwert 1. Dann gilt:
Für jede Version U von $\tilde{U}$ und jedes $\varepsilon \in \{+, -\}$ ist $H'_\varepsilon := P_\varepsilon H$ invariant unter U und $G \rightarrow \mathcal{U}(H'_\varepsilon), g \mapsto U(g)|_{H'_\varepsilon}$, ist eine Version einer CBD $\tilde{U}_\varepsilon: G \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(H'_\varepsilon, P'_{I_\varepsilon})$ mit $I_\varepsilon := \{i \in I \mid P_i P_\varepsilon \neq 0\}$, $P'_{I_\varepsilon} := (P'_i)_{i \in I_\varepsilon} := (P_i|_{H'_\varepsilon})_{i \in I_\varepsilon}$. $\tilde{U}_\varepsilon$ ist unabhängig von der Wahl der Version U von $\tilde{U}$.

Beweis: Nach (6.28.3) gilt: $\forall k \in X_+ \cup X_-, i \in I (N_k P_i = P_i N_k)$. Damit folgt leicht: $\sum_{i \in I_\varepsilon} P'_i = 1_{H'_\varepsilon}$, $P'_i P'_j = \delta_{ij} P'_i$, so daß $(H'_\varepsilon, P'_{I_\varepsilon})$ ein Bündelraum ist. Für jede Version U von $\tilde{U}$ gilt: $\forall g, g' \in G, i \in I (\exists \omega_i(g, g') \in \mathbb{C}_1 (U(g)U(g') = \sum_{i \in I} \omega_i(g, g') P_i U(gg')))$. Daraus folgt: $\forall g, g' \in G (U(g)|_{H'_\varepsilon} U(g')|_{H'_\varepsilon} = \sum_{i \in I_\varepsilon} \omega_i(g, g') P_i|_{H'_\varepsilon} U(gg')|_{H'_\varepsilon})$ woraus sich die Behauptung sofort ergibt.

Nach (6.30) sind also U_+ und U_- aus (6.28) Versionen von CBDen von G auf den "Einteilchenräumen" H_+ und H_- . Somit erhält man alle FBDen einer Gruppe G , indem man diejenigen CBDen von G auf H_+ und H_- betrachtet, die eine Version mit den Eigenschaften (6.28.2) besitzen, und dann mit je einer solchen Version die Operatoren $U(g)$ aus (6.28.1) bildet. Die Abbildung $g \mapsto U(g)$ ist zwar Version einer FBD, jedoch hängen deren Überauswahloperatoren, ebenso wie die Operatormenge $\{U(g) \mid g \in G\}$ selbst, i.allg. von der Versionswahl im Einteilchenraum ab. Um das Wesentliche nicht in technischen Einzelheiten ersticken zu lassen, formulieren wir eine Essenz ohne Anspruch auf Präzision: Es gibt eine kanonische surjektive Abbildung von den Versionen von CBDen einer Gruppe im Einteilchenraum auf die FBDen im Vielteilchenraum.

Wir untersuchen nun diejenigen Überauswahlregeln im Vielteilchen-

raum genauer, die durch die Wahl einer Version einer CBD im Einteilchenraum bestimmt werden.

(6.31) Satz: Seien G eine Gruppe und für jedes $\varepsilon \in \{+, -\}$ $\tilde{U}_\varepsilon: G \rightarrow \tilde{U}(H_\varepsilon, P_{X_\varepsilon})$ eine BD derart, daß für jedes $g \in G$ $\tilde{U}_+(g)$ und $\tilde{U}_-(g)$ entweder beide zu $\tilde{U}_+(H_\varepsilon, P_{X_\varepsilon})$ oder beide zu $\tilde{U}_-(H_\varepsilon, P_{X_\varepsilon})$ gehören. Weiter seien für jedes $k \in X_\varepsilon$ N_k der mit dem Teilraum $P_k H_\varepsilon \subset H_\varepsilon$ assoziierte Teilchenzahloperator auf $H := F_+(H_+) \otimes F_-(H_-)$, für jedes $\varepsilon \in \{+, -\}$ U_ε eine Version von $\tilde{U}_\varepsilon$ und für alle $g, g' \in G, k \in X := X_+ \cup X_-$ $\omega_k(g, g') \in \mathbb{C}_1$ mit $U_\varepsilon(g) U_\varepsilon(g') = \sum_{k \in X_\varepsilon} \omega_k(g, g') P_k U_\varepsilon(gg')$. Dann gilt:

- (a) Auf der Menge $\mathcal{E}$ der simultanen Eigenunterräume der Operatoren $(N_k)_{k \in X}$, deren Elemente wir durch ihre Eigenwerte bezeichnen als $\langle (n_k)_{k \in X} \rangle$, ist durch $\langle (n_k)_{k \in X} \rangle \sim \langle (n'_k)_{k \in X} \rangle : \Leftrightarrow \forall g, g' \in G \left(\prod_{k \in X} \omega_k(g, g')^{(n_k - n'_k)} = 1 \right)$ eine Äquivalenzrelation definiert.
- (b) Die Abbildung $U: G \rightarrow \mathcal{U}(H), g \mapsto (U_+(g))^\vee \otimes (U_-(g))^\vee$, ist Version einer maximal kohärenten BD in $\tilde{U}(H, P_I)$ mit $I := \mathcal{E}/\sim, \forall i \in I (P_i := \text{Projektor von } H \text{ auf die direkte Summe der zu } i \text{ gehörigen Elemente von } \mathcal{E})$.

Beweis: (a) ist trivial und (b) folgt sofort aus der Tatsache, daß für ein Element $x \in \langle (n_k)_{k \in X} \rangle$ gilt:

$$(U_+(g))^\vee \otimes (U_-(g))^\vee (U_+(g'))^\vee \otimes (U_-(g'))^\vee x = \prod_{k \in X} (\omega_k(g, g'))^{n_k} (U_+(gg'))^\vee \otimes (U_-(gg'))^\vee x.$$

Wir wenden uns wieder speziell der vollen Poincarégruppe zu. Nach (6.29) wäre es naheliegend, in Form eines Struktursatzes eine Übersicht über alle FBDen von $\mathcal{P}$ zu geben. Es zeigt sich jedoch, daß eine solche Übersicht recht kompliziert ist und mehr technische als inhaltliche Züge aufweist. Daher werden wir nur FBDen im Zustandsraum eines speziellen Teilchensystems diskutieren und dabei überdies physikalisch begründete Annahmen über die Überauswahl-Struktur dieses Zustandsraumes machen, die über (6.29) hinausgehen.

Wir betrachten ein Vielteilchensystem, dessen Streuzustände sich aus $p^+, p^-, e^+, e^-, \pi^+, \pi^-, \pi^0, \gamma$ aufbauen, und verfolgen das Ziel, eine derartige FBD $\tilde{U}$ mit einer Version $U: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{U}(H, P_I)$ anzugeben, daß die Forderungen (6.17), (6.18), (6.21.4-6) für die S-Matrix nicht im Widerspruch zu den beobachteten Streuprozessen stehen. Als Einteil-

chen-Zustandsräume $H_p, H_e, H_\pi, H_{\pi^0}, H_\gamma$ von $p^+p^-, e^-e^+, \pi^+\pi^-, \pi^0, \gamma$ wählen wir die Darstellungsräume der CMDen $U_p := \underline{U}_{\mu_p, 1/2}^{(+, +, -)}$, $U_e := \underline{U}_{\mu_e, 1/2}^{(+, -)}$, $U_\pi := \underline{U}_{\mu_\pi, 0}^{(+, +, -)}$, $U_{\pi^0} := \underline{U}_{\mu_{\pi^0}, 0}^{(+, +)}$, $U_\gamma := \underline{U}_{0, 1}^{(+, +)}$. Dann ist der Vielteilchenraum gegeben durch $H := F_+(H_+) \otimes F_-(H_-)$ mit $H_+ := H_p \oplus H_e$, $H_- := H_\pi \oplus H_{\pi^0} \oplus H_\gamma$. Damit wird das relativistische Transformationsverhalten der Zustände durch folgende CUED von $\tilde{\mathcal{P}}_0$ beschrieben (s.(6.23)):

$$U: \tilde{\mathcal{P}}_0 \rightarrow \mathcal{U}_+(H), \quad g \mapsto (U_+(g))^\vee \otimes (U_-(g))^\vee$$

mit $U_+(g) := U_p(g) \oplus U_e(g)$, $U_-(g) := U_\pi(g) \oplus U_{\pi^0}(g) \oplus U_\gamma(g)$.

Man beachte, daß die Wahl der oberen Indizes $(+, +, -), \dots, (+, +)$ der Darstellungen $U_p, \dots, U_\gamma$ solange wir keine Inversionen betrachten nur festlegt, daß diese Darstellungen bis auf U_{π^0} alle verdoppelt sind (s.(5.12)). Nach (6.23.b) sind die Bildräume der Projektoren $(1_{H^+} U(0, -1))/2$ und $(1_{H^-} U(0, -1))/2$ durch eine Überauswahlregel getrennt. Deshalb sind zwei simultane Eigenzustände der Teilchenzahloperatoren $N_p, N_e, \dots, N_\gamma$ auf H durch eine Überauswahlregel getrennt, wenn sie sich in der "Univalenzquantenzahl" $(-1)^{\text{Zahl der Fermionen}}$ unterscheiden. Diese Überauswahlregel ist als Univalenzüberauswahlregel oder als Überauswahlregel zwischen Fermionen und Bosonen oder zwischen Zuständen verschiedener "Fermionenanzahl" wohlbekannt. Sie verbietet z.B. einen β -Zerfall ohne Neutrino: $n \rightarrow p^+ + e^-$.

Wir diskutieren nun die Inversionsoperatoren. Dazu stellen wir einen Satz über die Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}$ voran.

(6.32) Satz: Sei ω ein $\tilde{\mathcal{P}}_p$ -Multiplikator von $\tilde{\mathcal{P}}$ mit

$$\forall g, g' \in \tilde{\mathcal{P}} \quad (\omega(g, g') \in \{1, -1\}). \text{ Dann gilt:}$$

- (a) Es gibt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, -1\}$ mit $\forall g, g' \in \tilde{\mathcal{P}} \quad (\omega(g, g') = \omega_{\alpha\beta}(g, g') \varphi_{\gamma\delta}(g, g'))$, wobei $\omega_{\alpha\beta}$ in (4.5) und $\varphi_{\gamma\delta}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma\delta}((a, A, I), (a', A', I')) &:= \varphi'_{\gamma\delta}(I, I') \text{ mit} \\ \forall i \in \{0, s, t, st\} \quad (\varphi'_{\gamma\delta}(I_0, I_1) &= \varphi'_{\gamma\delta}(I_1, I_0) := 1), \\ \varphi'_{\gamma\delta}(I_s, I_s) &:= \gamma, \quad \varphi'_{\gamma\delta}(I_s, I_t) := \delta, \quad \varphi'_{\gamma\delta}(I_s, I_{st}) := \gamma\delta, \\ \varphi'_{\gamma\delta}(I_t, I_s) &:= \gamma\delta, \quad \varphi'_{\gamma\delta}(I_t, I_t) := 1, \quad \varphi'_{\gamma\delta}(I_t, I_{st}) := \gamma\delta, \\ \varphi'_{\gamma\delta}(I_{st}, I_s) &:= \delta, \quad \varphi'_{\gamma\delta}(I_{st}, I_t) := \delta, \quad \varphi'_{\gamma\delta}(I_{st}, I_{st}) := 1. \end{aligned}$$

- (b) Sei $R_{\gamma\delta} := \{g: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}_1 \mid \forall g, g' \in \tilde{\mathcal{P}} \quad (\varphi_{\gamma\delta}(g, g') = S(g) \delta_g(g(g')) / S(gg'))\}$ mit δ_g aus (3.18.a) für $G_+ = \tilde{\mathcal{P}}_p$. Dann gibt es für jedes $g \in R_{\gamma\delta}$ ein $\theta \in \{1, -1\}$, $\tau \in \mathbb{C}_1$ mit $g(a, A, I) := g'(I)$, $g'(I_0) := 1$, $g'(I_s) := \theta\sqrt{\gamma}$, $g'(I_t) := \tau$, $g'(I_{st}) := \theta\delta\tau\sqrt{\delta}$. Insbesondere sind die $\varphi_{\gamma\delta}$ trivialäquivalent zum trivialen Multiplikator von $\tilde{\mathcal{P}}$.

Beweis: Nach (4.5) gibt es $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$ derart, daß ω trivialäquivalent ist zu $\omega_{\alpha\beta}$. Es gibt also eine Funktion $\varphi: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{C}_1$ mit $\omega(g, g') = \omega_{\alpha\beta}(g, g') \varphi(g) \delta_g(\varphi(g')) / \varphi(gg')$. Da ω nur die Werte 1 und -1 annimmt, erfüllt $\lambda: g \mapsto \varphi(g)^2$ die Gleichungen (3.37.a) für $G = \tilde{\mathcal{P}}$, $G_+ = \tilde{\mathcal{P}}_P$ und ist wegen (4.6) auf den Zusammenhangskomponenten von $\tilde{\mathcal{P}}$ konstant. Damit definiert λ eine Funktion aus $\text{Ch}(K_4, K_4^+)$, so daß nach (3.38) gilt: $\lambda(I_0) = 1$, $\lambda(I_s) = \gamma$, $\lambda(I_t) = \tau^2$, $\lambda(I_{st}) = \gamma\tau^2$ mit $\gamma \in \{1, -1\}$, $\tau^2 \in \mathbb{C}_1$. Damit folgt für φ die in (b) behauptete Form und für $\varphi'(I, I') := \varphi'(I) \delta_I(\varphi(I')) / \varphi(II')$ ergeben sich leicht die Werte aus (a). ■

Da die Operatoren $U_P(I_s), U_e(I_s), U_\pi(I_s)$ und $U_{\pi^0}(I_s)$ nach 5.6. den üblichen PC-Operatoren für Einteilchenzustände entsprechen, bedeutet $\mathcal{P}$ -Invarianz das Fehlen von PC-brechenden und von T-brechenden Effekten. Daber ist (6.21.4-6) eine zumindest als Näherung sinnvolle Forderung. Die allgemeinste FBD von $\tilde{\mathcal{P}}$, die auf die Einteilchenräume von $p^+p^-, e^-e^+, \dots, \gamma$ eingeschränkt die SDen $\hat{U}_p, \hat{U}_e, \dots, \hat{U}_\gamma$ liefert, hat eine Version U der Form:

$$U_+(I_1) := \mathcal{S}_P(I_1) U_P(I_1) \oplus \mathcal{S}_e(I_1) U_e(I_1),$$
$$U_-(I_1) := \mathcal{S}_\pi(I_1) U_\pi(I_1) \oplus \mathcal{S}_{\pi^0}(I_1) U_{\pi^0}(I_1) \oplus \mathcal{S}_\gamma(I_1) U_\gamma(I_1),$$
$$U(I_1) := (U_+(I_1))^\vee \otimes (U_-(I_1))^\vee, \quad U_\varepsilon(a, A, I_1) := U_\varepsilon(a, A) U_\varepsilon(I_1), \quad \varepsilon \in \{+, -, \emptyset\},$$
wobei die $\mathcal{S}(I_1), i \in \{0, s, t, st\}$, Faktoren aus $\mathbb{C}_1$ sind, deren Werte wir noch festzulegen haben. Dabei sind die folgenden Gesichtspunkte zu beachten.

1. Die Struktur des kohärentesten Bündelraums (H, P_I) für den $U: \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{U}(H, P_I)$ Version einer FBD ist, hängt nach (6.31) von den Multiplikatoren ω_k der CMDen $(a, A, I) \mapsto \mathcal{S}_k(I) U_k(a, A, I), k \in X := \{p, e, \pi, \pi^0, \gamma\}$, ab. Nun kann für jedes k ω_k nur Werte aus $\{1, -1\}$ annehmen. Denn bei einem erlaubten Streuprozess gehören der Anfangs- und der Endzustand nach (6.18) demselben kohärenten Teilraum an, so daß nach (6.30) $\prod_{k \in X} \omega_k(g, g')^{(n_k - n'_k)} = 1$ gelten muß. Da-

raus folgt:

$$p^+ + \pi^- \rightarrow p^+ + \pi^- + \pi^0 \Rightarrow \forall g, g' \quad ((\omega_p(g, g'))^0 (\omega_\pi(g, g'))^0 (\omega_{\pi^0}(g, g'))^1)^1 = 1 \\ \Rightarrow \forall g, g' \in \tilde{\mathcal{P}} \quad (\omega_{\pi^0}(g, g') = 1).$$

Analog folgt aus den nachstehenden Prozessen für alle $g, g' \in \tilde{\mathcal{P}}$:

$$p^+ + \gamma \rightarrow p^+ + \pi^0 : \omega_\gamma(g, g') = 1, \\ p^+ + \pi^0 \rightarrow p^+ + \pi^+ + \pi^- : \omega_\pi(g, g') \in \{1, -1\}, \\ p^+ + p^- \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0 : \omega_p(g, g') \in \{1, -1\}, \\ e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma : \omega_e(g, g') \in \{1, -1\}.$$

In (6.32) sind alle $\tilde{\mathcal{P}}_p$ -Multiplikatoren von $\tilde{\mathcal{P}}$ angegeben, die nur Werte aus $\{1, -1\}$ annehmen, und aus (6.32.b) ist abzulesen, welche Wahl von ξ_k einen bestimmten Multiplikator ω_k liefert. Danach ist zumindest für $\xi_k(I_t)$ jeder Wert aus $\mathbb{C}_1$ möglich.

2. In (5.46) haben wir gefunden, daß die mit den Darstellungen U_k assoziierten freien Feldoperatoren nur für gewisse Wahlen der Faktoren $\xi(I_1)$ (dort ζ_1) ein ausgezeichnetes Transformationsverhalten haben. Nimmt man, durch die Störungsrechnung inspiriert, an, daß sich die S-Matrix aus freien Feldoperatoren aufbaut, so ist bestenfalls für diese speziellen $\xi(I_1)$ ein einfaches S-Matrix-Transformationsverhalten der Form (6.21.4-6) zu erwarten.

Sowohl den Gesichtspunkten aus 1. als auch denen aus 2. wird folgende Wahl gerecht:

$$\begin{aligned} (6.33) \quad & \xi_p(I_s)=1, \quad \xi_p(I_t)=1, \quad \xi_p(I_{st})=1, \\ & \xi_e(I_s)=1, \quad \xi_e(I_t)=1, \quad \xi_e(I_{st})=1, \\ & \forall j \in \{s, t, st\} \quad (\xi_{\pi}(I_j) = \xi_{\pi^0}(I_j) = \xi_{\pi^1}(I_j) = 1). \end{aligned}$$

Trifft man zwei verschiedene Wahlen für die $\xi(I_1)$, so erhält man 1. allg. verschiedene BDen von $\tilde{\mathcal{P}}$ und es wird 1.allg. unitäre Operatoren S geben, die (6.18) und (6.21.4-6) für die eine Wahl erfüllen und für die andere nicht. Eine ausführliche Diskussion dieser Verhältnisse scheint nur bei Vorgabe einer konkreten Klasse von Ansätzen für die S-Matrix bzw. die Wechselwirkungsichte sinnvoll und soll hier nicht durchgeführt werden; für Untersuchungen in dieser Richtung verweisen wir z.B. auf die in [34; p. 226] angegebene Literatur über Yang-Tiomno-Phasen.

Mit der Wahl (6.33) findet man z.B. leicht: $\omega_p(I_s, I_t)=1$, $\omega_e(I_s, I_t)=-1$. Daraus folgt mit (6.31) eine Überauswahlregel zwischen denjenigen simultanen Eigenzuständen von $N_{p^+}, N_{p^-}, \dots, N_{\pi^1}$, die sich in der Zahl $(-1)^{n_e^{++} + n_e^-}$ unterscheiden, wobei n_k die Eigenwerte von N_k sind. Diese Überauswahlregel ist hier eine unmittelbare Folge der unterschiedlichen Wahl der oberen Indizes $(+, +, -)$ bzw. $(+, -)$ der Darstellungen U_p bzw. U_e . Andererseits ergibt sich diese Überauswahlregel leicht aus der Überauswahlregel für die Leptonenladung, ohne aber mit ihr identisch zu sein. Weiter folgt aus der Überauswahlregel für die Leptonenladung oder die elektrische Ladung, daß $\xi_p(I_1) U_{e1/2}^{(+, +, -)}(I_1)$ und $\xi_e(I_1) U_{\mu e1/2}^{(+, -)}(I_1)$ mit ξ_p und ξ_e aus (6.33) dieselbe Symmetrieoperation beschreiben. Danach hat es also bei Gül-

tigkeit einer derartigen Ladungs-Überswahlregel gar keinen Sinn zu fragen, nach welcher dieser Darstellungen sich das Elektron nun wirklich transformiere; entsprechendes gilt auch für das Proton und das geladene Pion.

Zur Begründung der obigen Behauptung gehen wir kurz auf die Überswahlregeln ein, die durch (baryonische, leptonische, elektrische) Ladungen erzeugt werden. Seien Q_p bzw. Q_e bzw. Q_π Ladungsoperatoren der in (5.49) ausgezeichneten Form auf H_p bzw. H_e bzw. H_π . Dann betrachten wir folgende CUED der additiven Gruppe $\mathbb{R}^3$ auf H :

$$(6.34) \quad \mathbb{R}^3 \ni (r_b, r_l, r_e) \longmapsto \tilde{U}(r_b, r_l, r_e) := \\ = ((e^{i(r_b + r_e) Q_p} 1_{H_p} \oplus e^{i(r_l - r_e) Q_e} 1_{H_e}))^\vee \otimes ((e^{i r_e Q_\pi} 1_{H_\pi} \oplus 1_{H_{\pi^0}} \oplus 1_{H_\delta}))^\vee.$$

Dann gilt mit der üblichen Festlegung der Baryonen-, Leptonen- und elektrischen Ladung von $p^+, p^-, e^-, e^+, \pi^+, \pi^-, \pi^0, \delta$, daß die Ladungsoperatoren auf H gegeben sind durch:

$$(6.35) \quad \mathcal{Q}_b := \lim_{r_b \rightarrow 0} (\tilde{U}(r_b, 0, 0) - 1_H) / i r_b$$

und $\mathcal{Q}_l, \mathcal{Q}_e$ entsprechend. Im Bündelraum (H, P_I) gelten genau dann Überswahlregeln für die betrachteten drei Ladungen wenn gilt:

$$(6.36) \quad \forall (r_b, r_l, r_e) \in \mathbb{R}^3, A \in \mathcal{O}(H, P_I) \quad (\tilde{U}(r_b, r_l, r_e) A = A \tilde{U}(r_b, r_l, r_e)).$$

Insbesondere kann man die Darstellungsoperatoren $U(a, A, I)$ in H mit beliebigen Operatoren $\tilde{U}(r_b, r_l, r_e)$ multiplizieren ohne ihre Wirkung auf die Menge der Präobservablen zu verändern. Damit folgt obige Behauptung aus folgenden leicht nachzurechnenden Gleichungen für den Ladungsoperator Q aus (5.49):

$$(6.37) \quad \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -, -)}(I_s) = \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, +, -)}(I_s), e^{i \epsilon \pi Q / 2} \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -, -)}(I_t) = i \epsilon \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, +, -)}(I_t), \\ e^{i \epsilon \pi Q / 2} \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, -, -)}(I_{st}) = -i \epsilon \underline{U}_{\mu, \epsilon}^{(+, +, -)}(I_{st}), \quad \epsilon \in \{1, -1\}.$$

6.4. Die volle Poincarégruppe als Symmetriegruppe der schwachen Wechselwirkung

Da die Symmetrie unter C, T und P (in der üblichen Nomenklatur) für die starke und die elektromagnetische Wechselwirkung nicht in Frage steht, ist die volle Poincarégruppe Symmetriegruppe dieser Wechselwirkungen unabhängig davon ob nun P oder PC als Rauminversionsoperation aufgefaßt wird. Unsere Interpretation des PC-Operators als Rauminversion ist daher in erster Linie interessant für die schwache Wechselwirkung für die P und C für sich keine Symmetrioperationen sind.

In 6.2. haben wir untersucht, wann eine Hamiltondichte ein wechselwirkendes Teilchensystem beschreibt, das die volle Poincarégruppe als Symmetriegruppe besitzt. Wir untersuchen nun, ob die dafür hinreichenden Bedingungen (6.8), (6.19) für die Hamiltondichte der sog. universellen 4-Fermionen-Wechselwirkung oder V-A-Wechselwirkung erfüllt sind. Dazu werden wir den Wechselwirkungsoperator etwas weniger formal behandeln als üblich und zumindest "genäherte" Hamiltondichten als selbstadjungierte Operatoren auf einem wohldefinierten Zustandsraum angeben.

Seien $\mu_1, \dots, \mu_4 \geq 0$ die Massen von vier, nicht notwendig verschiedenen, Teilchen mit Spin 1/2, die sich von ihren Antiteilchen unterscheiden. Dann ist der Zustandsraum des freien Vielteilchensystems, das von diesen Teilchenarten aufgebaut wird, gegeben durch:

$$(6.38) \quad H := F_+(H_+), H_+ := \bigoplus_{j=1}^4 H_{S_j} \quad \text{mit} \quad S_j := \begin{pmatrix} +, - \\ \mu_j, 1/2 \end{pmatrix}.$$

Seien $\psi_1, \dots, \psi_4$ Diracfelder aus (5.67) für die Massen $\mu_1, \dots, \mu_4$, wobei der Index k in (5.67) zunächst beliebig, aber für alle 4 Felder gleich gewählt sein soll. Dann sind die ψ_j nach (5.45) auf $F_+(H_{S_j})$ definiert⁺; wir wollen sie aber für das folgende, gemäß dem im Anschluß an (6.7) beschriebenen Vorgehen, als Felder auf H ansehen. Feldoperatoren, die zu verschiedenen Feldern gehören, antikommutieren dann.

Um dem formalen Ausdruck

$$(\bar{\psi}_1(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_2(x)) (\bar{\psi}_3(x) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_4(x))$$

einen Sinn zu geben, sind einige Vorbereitungen erforderlich.

⁺) Man beachte, daß für $S = \begin{pmatrix} +, - \\ \mu, 1/2 \end{pmatrix}$ und $S' = \begin{pmatrix} +, +, - \\ \mu, 1/2 \end{pmatrix}$ gilt: $H_S = H_{S'}$.

(6.39) Def: Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$, für die gilt:

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int d^4x f_n(x) g(x) = g(0) \right), \quad \phi_1, \dots, \phi_1, \text{ Komponenten}$$
 irgendwelcher Felder der Form (5.35) auf $H' := F_\varepsilon(H'_\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, oder auf $H' := F_+(H'_+) \otimes F_-(H'_-)$, H'_0 die lineare Hülle derjenigen nuklearen Vektoren aus H' , deren Faktoren Funktionen mit kompaktem Träger auf dem jeweiligen Massenhypersphäroid sind, und $D_1(\partial), \dots, \dots, D_1(\partial)$ irgendwelche Differentialoperatoren der Form (5.42). Dann definieren wir den Ausdruck $:(D_1(\partial) \phi_1)(x) \dots (D_1(\partial) \phi_1)(x):$ als Sesquilinearform von $H'_0 \times H'_0$ in $\mathbb{C}$:

$$(\psi, \varphi) \mapsto \langle \psi | : (D_1(\partial) \phi_1)(x) \dots (D_1(\partial) \phi_1)(x) : | \varphi \rangle :=$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | : (D_1(\partial) \phi_1)(\{x, 1\} f_n) \dots (D_1(\partial) \phi_1)(\{x, 1\} f_n) : | \varphi \rangle,$$
 wobei $:" \dots :"$ die übliche Normalordnungsoperation für Monome von Feldoperatoren ist⁺.

Man sieht leicht, daß der Limes existiert und von der speziellen Wahl der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängig ist. Dasselbe gilt auch für allgemeinere dichte Teilräume als H'_0 , worauf wir aber nicht eingehen wollen. Die folgenden Definitionen werden zum Rechnen mit Sesquilinearformen benötigt.

(6.40) Def: Seien B und B' Sesquilinearformen von $H'_0 \times H'_0$ in $\mathbb{C}$, $\langle \psi | B | \varphi \rangle$ bzw. $\langle \psi | B' | \varphi \rangle$ deren Werte an der Stelle $(\psi, \varphi) \in H'_0 \times H'_0$ und V ein semiunitärer Operator auf H' , der H'_0 invariant läßt. Dann erklären wir:

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\alpha B + \beta B' : H'_0 \times H'_0 \rightarrow \mathbb{C}, (\psi, \varphi) \mapsto \alpha \langle \psi | B | \varphi \rangle + \beta \langle \psi | B' | \varphi \rangle),$

(b) $B^+ : H'_0 \times H'_0 \rightarrow \mathbb{C}, (\psi, \varphi) \mapsto \langle \varphi | B | \psi \rangle^*,$

(c) $V^{-1} B V : H'_0 \times H'_0 \rightarrow \mathbb{C}, (\psi, \varphi) \mapsto \begin{cases} \langle V \psi | B | V \varphi \rangle & \text{für } V \text{ linear} \\ \langle V \psi | B | V \varphi \rangle^* & \text{für } V \text{ antilinear} \end{cases}.$

Ist die Sesquilinearform B von einem linearen Operator $\bar{B}$ auf H'_0 abgeleitet, d.h. gilt: $\forall \psi, \varphi \in H'_0 \quad (\langle \psi | B | \varphi \rangle = \langle \psi | \bar{B} \varphi \rangle)$, so ist offenbar $\alpha B + \beta B'$ bzw. B^+ bzw. $V^{-1} B V$ von dem Operator $\alpha \bar{B} + \beta \bar{B}'$ bzw. $\bar{B}^+$ bzw. $V^{-1} \bar{B} V$ abgeleitet.

Mit (6.39) und (6.40) ist durch

+) Man beachte, daß $\langle | \rangle$ das Skalarprodukt von H' bezeichnet, während $\langle | | \rangle$ lediglich eine suggestive Schreibweise für die Werte der Sesquilinearform ist.

(6.41) $H_W(x) := V(x) + V(x)^+$ mit

$$V(x) := \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu=1}^4 : \bar{\Psi}_{1, \alpha}(x) (\delta_{\lambda}^{\alpha} (1 - \delta_5^{\alpha}))_{\alpha \beta} \Psi_{2, \beta}(x) \Psi_{3, \mu}(x) (\delta_{\lambda}^{\mu} (1 - \delta_5^{\mu}))_{\mu \nu} \Psi_{4, \nu}(x) :$$

eine hermitesche Sesquilinearform auf H_0 definiert. Es gibt aber keinen linearen Operator, von dem $H_W(x)$ abgeleitet ist. Damit ist für die $H_W(x)$ nicht in natürlicher Weise ein Produkt definiert. Eine Produkterklärung ist aber nötig, um den Gleichungen (6.8) und (6.16) einen Sinn geben zu können. Davon sind wir nach der in 6.2. erläuterten darstellungstheoretischen Bedeutung von $H_W(x)$ hauptsächlich an (6.8) interessiert; zu (6.16) sei lediglich bemerkt, daß man mit demselben Recht, mit dem die Erklärung von Produkten von Distributionen als mathematisches Schlüsselproblem der Renormierungstheorie angesehen wird, auch die Erklärung des Produktes dicht definierter Sesquilinearformen als dieses Schlüsselproblem ansehen kann. Die in (6.8) geforderte Vertauschbarkeit wird wenigstens näherungsweise von der "ausgeschmierten" Hamiltondichte $H_W(x, f_n)$ erfüllt, die wir durch den Ausdruck (6.41) definieren, dabei jedoch x durch $\{x, 1\} f_n$ mit irgendeiner der Funktionen f_n aus (6.39) ersetzen. Dann ist $H_W(x, f_n)$ wegen der Beschränktheit der Feldoperatoren ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf H und vertauscht mit $H_W(y, f_n)$ genau dann, wenn $\{x, 1\} f_n$ und $\{y, 1\} f_n$ raumartig getrennt sind. Liegt der Träger von f_n in einer kleinen Umgebung von 0, so ist die Vertauschbarkeit von $H_W(x, f_n)$ und $H_W(y, f_n)$ für raumartige Abstände nur dann gestört, wenn x und y in der euklidischen Norm des $\mathbb{R}^4$ eng benachbart sind.

Wir kommen nun zum Transformationsverhalten von $H_W(x)$ unter der vollen Poincarégruppe. Um diesbezügliche Rechnungen besonders einfach zu machen, drücken wir die Feldoperatoren der Diracfelder gemäß (5.45) durch diejenigen der zugehörigen Theisfelder aus. Wählen wir den Index k der Diracfelder in (5.67) aus $\{2, 4\}$, so gilt mit den zugehörigen δ^+ -Matrizen (5.66.b):

$$\frac{1}{2}(1 - \delta_5^{\alpha}) = \begin{pmatrix} \delta_0^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2}(1 + \delta_5^{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_0^{\alpha} \end{pmatrix}; \text{ damit folgt aus (6.41):}$$

$$(6.42) \quad V(x) = \sum_{\alpha, \beta, \mu, \nu=1}^2 : \phi_{1, \alpha}^+(x) (\delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\alpha \beta}) \phi_{2, \beta}(x) \phi_{3, \mu}^+(x) (\delta_{\lambda}^{\mu} \delta_{\mu \nu}) \phi_{4, \nu}(x) :.$$

Für $k \in \{1, 3\}$ läßt sich $V(x)$ nur mit Hilfe von Differentialoperatoren durch Theisfelder ausdrücken; auch in diesem Fall erhält man jedoch einen Ausdruck der Form (6.42), wenn man in (6.41) $1 - \delta_5^{\alpha}$ durch $1 + \delta_5^{\alpha}$ ersetzt. Durch (6.42) ist der einfachste "Lorentzskalar" gegeben,

den man aus vier 2-komponentigen Feldern für Spin 1/2 bilden kann. Die V-A-Wechselwirkung ist also bei Beschreibung der Teilchen durch Theisfelder deutlich ausgezeichnet, was bei der 4-komponentigen Teilchenbeschreibung nicht der Fall ist. Dies wurde in der Arbeit [32] entdeckt, auf die wir für eine ausführliche Diskussion des Ansatzes (6.42) verweisen. Wir definieren nun eine FBD $\tilde{U}$ von $\tilde{\mathcal{P}}$ auf H durch folgende Version U :

$$(6.43) \quad \forall g \in \tilde{\mathcal{P}} \quad (U(g) := (U_+(g))^{\vee}) \text{ mit}$$

$$\forall j \in \{s, t, st\} \quad (U_+(a, A, I_j) := U_+(a, A) U_+(I_j)),$$

$$U_+(a, A) := \bigoplus_{j=1}^4 \underline{U}_{g_j}(a, A), U_+(I_s) := i \bigoplus_{j=1}^4 \underline{U}_{g_j}(I_s),$$

$$U_+(I_t) := i \bigoplus_{j=1}^4 \underline{U}_{g_j}(I_t), U_+(I_{st}) := \bigoplus_{j=1}^4 \underline{U}_{g_j}(I_{st}),$$

Danach ist U_+ eine CMD von $\mathcal{P}$ mit dem Multiplikator $\omega_{-+} \varphi_{--}$ aus (6.32.a) und $\tilde{U}$ eine FBD von $\tilde{\mathcal{P}}$ auf einem Bündelraum, dessen einzige Überauswahlregel die zwischen dem Unterraum mit gerader und dem mit ungerader Teilchenzahl ist. Damit erhalten wir als abschließendes Resultat:

(6.44) Satz: Sei $H_W(x) := V(x) + V(x)^+$ mit $V(x)$ aus (6.42) und $k=4$ als Index k der Theisfelder in (5.62). Dann gilt mit U aus (6.43) für alle $x \in \mathbb{R}^4, (a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_0$:

- (a) $U(a, A) H_W(x) U(a, A)^{-1} = H_W(\wedge(A)x + a),$
- (b) $U(I_s) H_W(x) U(I_s)^{-1} = H_W(I_s x),$
- (c) $U(I_t) H_W(x) U(I_t)^{-1} = H_W(I_t x),$
- (d) $U(I_{st}) H_W(x) U(I_{st})^{-1} = H_W(-x).$

Beweis: Wir stellen zwei leicht zu verifizierende Feststellungen voran.

- (1) Seien W ein Monom von Feldoperatoren auf H und $V \in \mathcal{U}(H)$ mit $V = \check{V}_+, V_+ \in \mathcal{U}(H_+)$, Dann gilt: $V:W:V^{-1} = :VWV^{-1}:, (:W:)^+ = :W^+:$.
- (2) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4)$, die im Distributionssinn gegen die Deltafunktion konvergiert (s. (6.39)). Dann gilt dasselbe für die Folgen $(\{A\}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\{I_j\}f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A \in SL(2, \mathbb{C}), j \in \{s, t, st\}$.

(a) Für alle $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_0, \psi, \varphi \in H_0$ gilt: $\langle \psi | U(a, A) V(x) U(a, A)^{-1} | \varphi \rangle =$

$$\begin{aligned} &= \langle U(a, A)^{-1} \psi | V(x) | U(a, A)^{-1} \varphi \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U(a, A)^{-1} \psi | \sum_{\alpha, \beta, \dots} : \phi_{1, \alpha}^+ (\{x, 1\} f_n) (\delta_{\lambda})_{\alpha \beta} \phi_{2, \beta} (\{x, 1\} f_n) \dots U(a, A)^{-1} \varphi \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | \sum_{\alpha, \beta, \dots} \check{U}_{g_1}(a, A) \phi_{1, \alpha}^+ (\{x, 1\} f_n) \check{U}_{g_1}(a, A)^{-1} (\delta_{\lambda})_{\alpha \beta} \check{U}_{g_2}(a, A) \phi_{2, \beta} (\{x, 1\} f_n) \\ &\quad \check{U}_{g_2}(a, A)^{-1} \dots \varphi \rangle = (\text{mit } f_n' := \{\wedge(A)x + a, 1\} \{A\} f_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta, \dots} : (A^+)^*_{\alpha \alpha'} \phi_{1, \alpha'}^+ (f_n') (\delta_{\lambda})_{\alpha \beta} A^+_{\beta \beta'} \phi_{2, \beta'} (f_n') \dots : \varphi \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | \sum_{\alpha, \dots, \delta} : \phi_{1, \alpha}^+ (f_n') (A \delta_{\lambda} A^+)_{\alpha \beta} \phi_{2, \beta} (f_n') \phi_{3, \gamma}^+ (f_n') (A \delta_{\lambda} A^+)_{\gamma \delta} \phi_{4, \delta} (f_n') : \varphi \rangle = \\ &\quad \langle \psi | V(\wedge(A)x + a) | \varphi \rangle. \text{ Analoges folgt sofort für } V(x)^+. \end{aligned}$$

(c) folgt durch sinngemäß dieselbe Rechnung wie für (a).

(d) $\langle \psi | U(I_{st}) V(x) U(I_{st})^{-1} | \varphi \rangle = (\text{mit } f_n' := \{I_{st} x, 1\} \{I_{st}\} f_n^*)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | \sum_{\alpha, \dots, \delta} : \phi_{1, \alpha} (f_n'') (\delta_{\lambda})_{\alpha \beta} \phi_{2, \beta}^+ (f_n'') \phi_{3, \gamma} (f_n'') (\delta_{\lambda})_{\gamma \delta} \phi_{4, \delta}^+ (f_n'') : \varphi \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi | \sum_{\alpha, \dots, \delta} : (\phi_{4, \delta} (f_n'') (\delta_{\lambda})_{\delta \gamma} \phi_{3, \gamma}^+ (f_n'') \dots)^+ : \varphi \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi | \sum_{\alpha, \dots, \delta} : \phi_{1, \alpha} (f_n'') (\delta_{\lambda})_{\alpha \beta} \phi_{\beta, 2}^+ (f_n'') \dots : \varphi \rangle^* = \langle \psi | V(-x)^+ | \varphi \rangle \end{aligned}$$

(b) folgt leicht durch Kombination von (c) und (d). ■

Der Beweis zeigt, daß (d) im Wesentlichen eine Folge der Hermitezität von $H_W(x)$ und (c) eine Folge von (a) ist; für eine solche Folgerung ist die spezielle Struktur von $H_W(x)$ gar nicht so wichtig, denn man kann mit Hilfe der Theisfelder leicht eine ganze Klasse von Hamiltondichten angeben, für die der Nachweis der Eigenschaften (6.44.a-d) analog verläuft. Das verleitet uns zu der folgenden nicht ganz wörtlich zu nehmenden Bemerkung: In der Menge der relativistischen Hamiltondichten, die aus den einzig natürlichen Feldern - den Theisfeldern - aufgebaut sind, ist die Teilmenge derjenigen Hamiltondichten, welche unter der vollen Poincarégruppe nicht invariant sind, "fast vom Maße Null". Danach wäre die Invarianz unter Inversionen keine Folge irgendwelcher "diskreter Symmetrieprinzipien", sondern ein mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwartender Nebeneffekt der relativistischen Invarianz.

Wir gehen nun noch kurz auf weitere Aspekte der schwachen Wechselwirkung ein. Obwohl die Hamiltondichte der V-A-Wechselwirkung störungstheoretisch in 1. Ordnung viele Phänomene gut beschreibt, begründet sie zumindest mit der üblichen Renormierungsmethode nicht eine dynamische Theorie von wenigstens ähnlicher Seriosität wie die

Quantenelektrodynamik. Dieser Mangel ist besonders fühlbar, da es gerade bei der schwachen Wechselwirkung besonders interessante Erscheinungen gibt, die sich einem Verständnis sowohl auf der Ebene der Störungstheorie erster Ordnung als auch auf der Ebene der S-Matrix-Theorie entziehen. Es sind dies z.B. die Phänomene, die beim Zerfall der neutralen Kaonen auftreten. Sieht man näherungsweise das langlebige und das kurzlebige neutrale Kaon als stabiles Teilchen an und beschreibt den Zerfall durch eine S-Matrix, so ergibt die Analyse des Zerfalls in 2 oder 3 Pionen, daß sich folgende zwei Möglichkeiten ausschließen.

1. Die S-Matrix vertauscht mit dem CP-Operator.
2. Langlebiges und kurzlebiges Kaon sind exakte Eigenzustände zum CP-Operator.

Während die Ungültigkeit von 1. eine offensichtliche CP-Verletzung bedeutet, ist dies für die Ungültigkeit von 2. zwar nach allgemeiner Meinung auch der Fall, ist aber keineswegs so zwingend. Es scheint durchaus möglich, daß in einem anderen dynamischen Schema als dem für den Kaon-Zerfall allgemein benützten Breit-Weisskopf-Wigner-Formalismus die Verletzung von 2. eine ebenso "symmetrische" Möglichkeit ist als 2. selbst. Es sei daher nochmals betont, was bereits am Beginn dieser Arbeit festgestellt wurde: physikalische Symmetrieprinzipien und ihre Konsequenzen können nicht von dynamischen Grundvorstellungen losgelöst werden.

Anhang

Es werden einige Formeln zusammengestellt, die bei den Rechnungen in den Kapiteln 4 und 5 häufig gebraucht werden.

1.6-Matrizen und der Homomorphismus $\Lambda: \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}_0(s.(4.3))$

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathfrak{G}_1 = -\mathfrak{G}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{G}_2 = -\mathfrak{G}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{G}_3 = -\mathfrak{G}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \Gamma := i\mathfrak{G}_2.$$

$$\forall x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \quad (\underline{x} = x^\nu \mathfrak{G}_\nu, \quad \tilde{x} = \sum_\nu x^\nu \mathfrak{G}^\nu, \quad (\underline{x})^t = (\underline{x})^*, \\ \tilde{x} = \Gamma(\underline{x})^* \Gamma^{-1}, \quad \tilde{\tilde{x}} = x^\nu x^\nu).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \quad (A \underline{x} A^t = \Lambda(A) \underline{x}, \quad A \tilde{x} A^+ = \Lambda((A^+)^{-1}) \tilde{x}, \quad \Lambda(A^+) = \Lambda(A)^t, \\ A \mathfrak{G}_\mu A^+ = \mathfrak{G}_\nu \Lambda(A)^\mu{}_\nu, \quad A \mathfrak{G}^\mu A^+ = \Lambda(A^{-1})^\mu{}_\nu \mathfrak{G}^\nu, \quad I_s \Lambda(A) I_s = \Lambda((A^+)^{-1}), \\ \Lambda(\Gamma)^\mu{}_\nu = (-1)^\mu \delta^\mu{}_\nu, \quad \Gamma A \Gamma^{-1} = (A^t)^{-1}).$$

2. Die Darstellungen $D^{(j)}$, $j \in \{0, \pm 1/2, \pm 1, \dots\}$ (s.(4.12))

Für alle komplexen 2×2 -Matrizen A gilt $D^{(-j)}(A) = D^{(j)}(\Gamma A^* \Gamma^{-1})$ und somit für $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ $D^{(j)}((A^+)^{-1}) = D^{(-j)}(A)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^4$ $D^{(j)}(\underline{x}) = D^{(-j)}(\tilde{x})$. Für Matrixelemente von $D^{(j)}(A)$ s. (4.12.b u. d.).

3. Vertauschungseigenschaften einiger Abbildungen

Für die Abbildungen $\mathcal{F}$ aus (5.33), $\{a, A, I_j\}$ aus (5.34), $P(\partial)$ aus (5.42) $\{K\}: \mathcal{J}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R}^4)$, $(\{K\}f)(x) = f(x)^*$ gilt:

$$P(\partial) \circ \{a, A, I_j\} = \{a, A, I_j\} \circ P(I \Lambda(A) \partial) \\ \{a, A, I_j\} \circ P(\partial) = P(I_j \Lambda(A)^{-1} \partial) \circ \{a, A, I_j\}$$

$$(\mathcal{F} P(-i\partial)f)(p) = P(p)(\mathcal{F}f)(p),$$

$$(D^{(\varepsilon|j|)}(-i\varepsilon\partial)f)(p) = (D^{(\varepsilon|j|)}(p)\mathcal{F})(p),$$

$$(D^{(\varepsilon|j|)}(-i\varepsilon\tilde{\partial})f)(p) = (D^{(\varepsilon|j|)}(\tilde{p})\mathcal{F})(p), \quad \varepsilon \in \{1, -1\},$$

$$\{K\} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \{K\} \circ \{0, 1, I_{st}\}, \quad \{0, A, I_j\} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \{0, A, I_j\}.$$

4. Kommutatorfunktionen und Faltungen

Für Δ_μ aus (5.37) und die Faltung aus (5.39) gilt:

$$\Delta_\mu^{(\varepsilon)}(f_{st}) = -\Delta_\mu^{(-\varepsilon)}(f), \quad (\Delta_\mu^{(\varepsilon)}(f^*))^* = -\Delta_\mu^{(\varepsilon)}(f_{st}),$$

$$\Delta_\mu^{(\varepsilon)}(\square f) = -\mu^2 \Delta_\mu^{(\varepsilon)}(f), \quad \varepsilon \in \{+, -, \emptyset\},$$

$$f * g = g * f, \quad (\partial^\mu f) * g = \partial^\mu (f * g) = f * (\partial^\mu g).$$

Liste der Symbole

1. Ohne Erklärung benutzte Symbole

$\Rightarrow, \Leftarrow, :=$: Folgerung, Äquivalenz, definierende Gleichheit.
 $x \in A, x \notin A$: x ist Element von A , x ist nicht Element von A .
 $\{a, b, \dots, c\}$ Menge die aus den Elementen $a, b, \dots, c$ besteht.
 $\{x \in A \mid \dots\}$ Menge aller Elemente von A für die ... gilt.
 $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$,
 $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, (a, b) : geordnetes Paar, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$,
 $A^n = A \times \dots \times A$, n -mal,
 $\forall x \in A (\dots)$: Für alle Elemente x der Menge A gilt
 $\exists x \in A (\dots)$: Es gibt ein Element x der Menge A für das ... gilt.
 $A / \sim$: Menge der Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation
 $\sim$ auf A .
 $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$: Menge der natürlichen, der reellen, der komplexen Zahlen.
 $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{C}_1 := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$, $\aleph_0$: Kardinalität von $\mathbb{N}$.
 $f: A \rightarrow B$: f ist eine Abbildung (Funktion), definiert auf A mit
Werten in B .
 $f: A \rightarrow B, a \mapsto b$, : siehe oben, zusätzlich $b = f(a)$.
 $f(C) = \{b \in B \mid \exists a \in C (f(a) = b)\}$, $f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$, $C \subset A$, $D \subset B$.
 $\circ$: Komposition von Abbildungen.
 $f|_C$: Einschränkung der Abbildung f auf eine Teilmenge C von A .
 id_A : Identische Abbildung auf A , $\text{card}(A)$: Kardinalität von A .
 G/S : Faktorgruppe der Gruppe G nach der Untergruppe S .
 $\langle \cdot | \cdot \rangle, \| \cdot \|$: Skalarprodukt und Norm im Hilbertraum.
 $\oplus, 1_H$: Orthogonale Summe und Einsoperator im Hilbertraum.
 A^+ : zu A adjungierter Operator.
 $*$: Komplexe Konjugation, δ_{ik} : Kroneckersymbol, $\blacksquare$: Beweisschluß.

2. Symbole, die in Sätzen oder Definitionen explizit eingeführt werden

$P_I, (H, P_I)$	(2.1)	$[U], [U] \in \tilde{U}(H, P_I)$	(2.6)
$\mathcal{H}(H, P_I), \mathcal{N}(H, P_I), \mathcal{A}(H, P_I)$	(2.2)	$\mathcal{U}(H), \mathcal{U}_+(H)$	(2.7)
$\mathcal{O}(H, P_I), \mathcal{O}_1(H, P_I)$	(2.2)	$\mathcal{C}(H), \tilde{\mathcal{U}}(H), \tilde{\mathcal{U}}_+(H)$	(2.7)
$\mathcal{U}(H, P_I; H', P_I')$	(2.3)	$\oplus$	(3.6)
$\mathcal{U}_+(H, P_I; H', P_I')$	(2.3)	$\oplus$	(3.35)
$\mathcal{J}(H, P_I), \mathcal{U}(H, P_I)$	(2.3)	$\text{Ch}(G, G_+)$	(3.37)
$\mathcal{U}_+(H, P_I), \mathcal{U}_-(H, P_I)$	(2.3)	I_o, I_s, I_t, I_{st}	28, 39
$\underline{U}, U \in \mathcal{U}(H, P_I)$	(2.4)	$xy, x, y \in \mathbb{R}^4$	38
$\mathcal{C}(H, P_I)$	(2.6)	$\mathcal{J}$	39
$\tilde{\mathcal{U}}(H, P_I)$	(2.6)	$\mathcal{L}_o$	39
$\tilde{\mathcal{U}}_+(H, P_I), \tilde{\mathcal{U}}_-(H, P_I)$	(2.6)	$\mathcal{P}_o, \mathcal{P}_s, \mathcal{P}_t, \mathcal{P}_{st}$	39

$\mathcal{P}, \mathcal{P}_P, \mathcal{P}_T, \mathcal{P}_{PT},$	39	" π^+ " in Φ^+ etc.	(5.30)f
Λ	(4.3)	$L_{\alpha,a}$	(5.32)
$\tilde{x}, \underline{x}, x \in \mathbb{R}^4$	(4.3)	$\mathcal{F}, \mathcal{F}_\mu$	(5.33)
$\mathcal{G}_0, \dots, \mathcal{G}_3$	(4.3)	$\{a, A, I\}$	(5.34)
$\mathcal{F}, \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}_{st}$	(4.4)	f_s, f_t, f_{st}	(5.34)
$\mathcal{F}, \mathcal{F}_P, \mathcal{F}_T, \mathcal{F}_{PT}$	(4.4)	$\Phi_{\alpha,a,\epsilon}^g, \Phi_{\alpha,a}$	(5.35)
O_μ	(4.8)	$\Delta_\mu, \Delta_\mu^{(+)}, \Delta_\mu^{(-)}$	(5.37)
$\mu(dp)$	(4.8)f	$\partial, \partial, \tilde{\partial}$	(5.37)f
k_m, k_o	(4.9), (4.10)	$f * g$	(5.39)
$A_m(p), A_o(p)$	(4.9), (4.10)	Φ_A^g	(5.41)f
m_A^P, A^P	(4.9), (4.10)	$\Psi_{\alpha,a}^g$	(5.45)
$E(2)$	(4.10)	$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_5$	(5.66)
Γ	(4.11)		
$D(j)$	(4.11'), (4.12)	BD Bündeldarstellung	
$D_o^{(s)}, D_c^{(r)}$	(4.13)	SD Strahldarstellung	
$H_m, j, H_o, H_{c,r}$	(4.14)	MD Multiplikator-darstellung	
$U_m, j, U_o, s, U_{c,r}$	(4.14)	ED eigentliche Darstellung	
P_m, j, T_m, j	(4.17)	C stetig	
P_o, s, T_o, s	(4.17)	U unitär	
$P_{c,r}, T_{c,r}$	(4.17)	I irreduzibel	
$\underline{H}_m, j, \underline{U}_m, j$	(5.3)	P physikalisch (nur für Darstellungen der Poincarégruppe)	
" $\cdot$ " in $Q_o, s, \underline{U}_o, s$ etc.	54		
$\underline{H}_o, s, \underline{U}_o, s$	(5.7)	z.B.: CUISD=stetige unitäre irredu-	
$\mathcal{R}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2'$	(5.10)	zible Strahldarstellung	
(ξ, η, χ)	(5.10)		
μ, ϵ	(5.10)		
N_g	(5.10)		
" $\wedge$ " in $\hat{a}$ etc.	(5.10)		
$\underline{H}_g, \underline{U}_g$	(5.11)		
P^g, T^g, R^g	(5.11)		
$T(H), T_o(H)$	61		
$F_+(H), F_-(H)$	(5.15)f		
$c_\epsilon(\cdot), c_\epsilon^+(\cdot)$	(5.18), (5.28)		
" $\vee$ " in $\check{U}, \check{U}(g)$ etc.	63, (5.28)		
"d" in $dU(x)$ etc.	(5.26)		
$\mathcal{J}(\mathbb{R}^4), \mathcal{J}'(\mathbb{R}^4)$	(5.30)		

Literaturverzeichnis

- 1 V. Bargmann: On Unitary Ray Representations of Continuous Groups; Ann. Math. 59, 1 (1954).
- 2 H. Boerner: Darstellungen von Gruppen; Springer, Berlin 1955.
- 3 C.J. Bradley, B.L. Davies: Magnetic Groups and Their Corepresentations; Rev. Mod. Phys. 40, 359 (1968).
- 4 R.H. Brennich: The Irreducible Ray Representations of the Full Inhomogeneous Galilei Group; Ann. Inst. Henri Poincaré A13, 137 (1970).
- 5 A.H. Clifford: Representations induced in an invariant subgroup; Ann. Math. 38, 533 (1937).
- 6 J.M. Cook: The Mathematics of Second Quantization; Trans. Amer. Math. Soc. 74, 222 (1953).
- 7 N. Dunford, J.T. Schwartz: Linear Operators II; Interscience, New York 1963.
- 8 F.J. Dyson: The Threefold Way, Algebraic Structure of Symmetry Groups and Ensembles in Quantum Mechanics; J. Math. Phys. 3, 1199 (1962).
- 9 H. Eckstein: Geometric Theory of Charge; Phys. Rev. 148, 1917 (1960).
- 10 H. Eckstein: Time Reversal and Superselection; Nuovo Cim. 23, 606 (1962).
- 11 H. Eckstein: Rigorous Symmetries of Elementary Particles; Erg. d. exakt. Nat. 37, 151 (1965).
- 12 G. Grawert, G. Lüders, H. Rollnik: The TCP Theorem and its Applications; Fortschr. d. Phys. 7, 291 (1959).
- 12.a J.C. Guillot: Observables d'une particule libre et changements de représentations spectrales; Helv. Phys. Acta 41, 5 (1968).
- 13 S. Helgason: Differential Geometry and Symmetric Spaces; Academic Press, New York London 1962.
- 14 K. Hepp: Théorie de la renormalisation; Springer, Berlin Heidelberg New York 1969 (Lecture Notes in Physics Bd. 2).
- 15 R.M.F. Houtappel, H. van Dam, E.P. Wigner: The Conceptual Base and Use of the Geometric Invariance Principles; Rev. Mod. Phys. 37, 595 (1965).
- 16 J. Yngvason: Zero-Mass Infinite Spin Representations of the Poincaré Group etc. ;Commun. math. Phys. 18, 195 (1970).
- 17 J.M. Jauch: Foundations of Quantum Mechanics; Addison-Wesley, Massachusetts 1968.

- 18 H. Joos: Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe etc.; Fortschr. d. Phys. 10, 65 (1962).
- 19 R. Jost: The General Theory of Quantized Fields; Amer. Math. Soc. Rhode Island 1965.
- 20 P.K. Kabir: The CP-Puzzle; Academic Press 1968.
- 20.a G. Källén: Elementarteilchenphysik; Bibl. Inst. Mannheim 1965.
- 21 D. Kastler: Introduction a l'electrodynamique quantique; Dunod, Paris 1961.
- 22 G.W. Mackey: Unitary Representations of Group Extensions I; Acta. Math. 99, 265 (1958).
- 23 R. Mirman: Analysis of the Experimental Meaning of Coherent Superposition and the Nonexistence of Superselection Rules; Phys. Rev. D 1, 3349 (1970).
- 24 U. Mutze: Gruppentheoretische Grundlagen zur Behandlung diskreter Symmetrien in der Quantentheorie, preprint, Sektion Physik der Universität München, 1969.
- 25 K.R. Parthasarathy: Projective Unitary Antiunitary Representations of Locally Compact Groups; Commun. Math. Phys. 15, 308 (1969).
- 26 W. Pauli: The Connection Between Spin and Statistics; Phys. Rev. 58, 716 (1940).
- 26.a G.A. Pozzi: Continuous Unitary Representations of Locally Compact Groups etc.; Nuovo Cim. Suppl. 4, 37 (1966).
- 27 A. Rieckers: Quantisierte Felder in Räumen normierbarer Zustände; Dissertation, Nat. Fak. d. Universität München 1969.
- 28 S.S. Schweber: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory; Harper Row, New York 1961.
- 29 Y.M. Shirokov: Space and Time Reflections in Relativistic Theory and Types of Symmetry of Elementary Particles; Nuclear Phys. 15, 1 (1960).
- 29.a D.J. Simms: Lie Groups and Quantum Mechanics; Springer, Berlin 1968 (Lecture Notes in Mathematics Bd. 52).
- 30 W.I. Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik Bd. 5; Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
- 31 R.F. Streater, A. Wightman: Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie; Bibl. Inst. Mannheim 1969.
- 32 W.R. Theis: Zweikomponentige Spinorfelder etc.; Fortschr. d. Phys. 7, 559 (1959).

- 33 G.C. Wick, A.S. Wightman, E.P. Wigner: Superselction Rule for Charge; Phys. Rev. D 1, 3267 (1970).
- 34 A.S. Wightman: L'invariance dans la mecanique relativiste quantique; in C. de Witt, R. Omnes (Eds.): Relations de dispersion et particules élémentaires, Herman, Paris 1960
- 35 E.P. Wigner: On Unitary Representations of the Inhomogenous Lorentz Group; Ann. Math. 40, 149 (1969).
- 36 E.P. Wigner: Group Theory etc.; Acad. Press, New York 1959.
- 37 E.P. Wigner: Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections; in F. Gürsey (Ed.): Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics; Gordon and Breach, New York 1964.

Lebenslauf

Am 5.5.43 wurde ich als Sohn des Kunsterziehers Erich Mutze und seiner Ehefrau Luise Mutze in Bad Neustadt/Saale geboren. In Bad Neustadt besuchte ich die Volksschule und die 1.Klasse des Realgymnasiums(1949-1954).Anschließend besuchte ich das Neusprachliche Gymnasium in Königshofen i. Gr. wo ich 1962 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 62/63 begann ich an der Universität München das Studium der Physik, legte im WS 64/65 die Diplom-Vorprüfung ab, fertigte unter Leitung von Prof. Dr. H. J. Meister meine Diplomarbeit an und legte im Juli 1968 die Diplomprüfung ab.

Seit 1968 bin ich Doktorand und wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Prof. Dr. H. J. Meister und werde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

1922/23

Am 5.5.23 wurde ich als einer von vier Personen durch Herrn
und seinen Sekretär in den Hof des Schlosses nach
Karlshausen, wo sich die Verwaltung der
Landes- und Kreisverwaltung (1922/23) befand, nach
dem aus dem Verwaltungsamt in Karlshausen
nach dem die Beförderung abging.

Am 12.5.23 begann ich in der Verwaltung, nach
dem der Direktor der Verwaltung, Herr Dr. H. J.
Ludwig, die Verwaltung der Landes- und Kreisverwaltung
übernahm, welche die Verwaltung der Landes- und Kreisverwaltung
übernahm.

Nach dem ich die Verwaltung der Landes- und Kreisverwaltung
übernahm, wurde ich von Herrn Dr. H. J. Ludwig
als stellvertretender Leiter der Verwaltung
bestellt.

